ГЛАВА 3. ОПЕРАЦИИ КОНЪЮНКЦИИ И ДИЗЪЮНКЦИИ

1. Предварительные замечания

Как было установлено в первой главе, операции конъюнкции $\wedge = min$ и $\vee = max$, введенные Заде, обладают почти всеми свойствами соответствующих булевых операций. Это позволяет легко обобщать на нечеткий случай многие понятия «четкой» логики и, более обще, «четкой» математики. Однако с многих точек зрения эти операции являются ограничительными. Возможность рассмотрения более «мягких» операций конъюнкции и дизъюнкции обсуждал Заде еще в своих первых работах.

Целесообразность применения тех или иных операций конъюнкции и дизъюнкции в нечеткой логике может рассматриваться с разных позиций в зависимости от области приложений нечеткой логики.

Во-первых, эти операции могут рассматриваться с точки зрения моделирования лингвистических связок «и» и «или», используемых человеком. С одной стороны, операции *min* и *max* являются адекватными в порядковых шкалах, в которых обычно измеряются лингвистические оценки. Это обуславливает их широкое применение в нечетких лингвистических моделях. Однако недостатком этих операций является то, что их результат равен значению одного операнда и не меняется при изменении значений второго операнда в определенном диапазоне величин. Например, $0.2 \wedge y = 0.2$ для всех значений $y \geq 0.2$. Кроме этого, в ряде экспериментальных работ было установлено, что операции *min* и *max* не являются достаточно удовлетворительными с точки зрения моделирования лингвистических связок. Это привело к появлению работ по разработке строго монотонных операций в порядковых шкалах, по настраиваемым на эксперта табличным операциям, а также стимулировало исследования по поиску новых операций конъюнкции и дизъюнкции.

Во-вторых, расширение класса операций конъюнкции и дизъюнкции вызывалось необходимостью построения обладающих достаточной общностью математических моделей, которые могли бы с единых позиций рассматривать, например, вероятностные и многозначные логики, различные методы принятия решений, обработки данных и т.д. Такое расширение класса операций конъюнкции и дизъюнкции нечеткой логики произошло в результате введения в рассмотрение недистрибутивных операций конъюнкции и дизъюнкции, известных под названием t-норм и t-конорм. В первой главе было показано, что условие дистрибутивности совместно с условиями монотонности и граничными условиями однозначно определяет операции Заде. В ряде работ установлено, что именно условие дистрибутивности является наиболее жестким ограничением на возможную форму операций конъюнкции и дизъюнкции. Удаление этого свойства из множества аксиом устраняет единственность операций *min* и *max* и дает возможность построения широкого спектра нечетких связок. Свойство дистрибутивности очень важно в логике, так как оно дает возможность совершать эквивалентные преобразования логических форм из дизъюнктивной в конъюнктивную форму и обратно. Это свойство активно используется в процедурах минимизации логических функций, в процедурах логического вывода на основе принципа резолюций и т.д. Однако, во многих задачах такие преобразования логических форм не являются необходимыми, и поэтому оказалось, что свойство дистрибутивности может быть «довольно безболезненно» удалено из системы аксиом, определяющих нечеткие операции конъюнкции и дизъюнкции. Понятия t-норм и t-конорм пришли в теорию нечетких множеств из теорий функциональных уравнений и вероятностных метрических пространств. Аксиомы этих операций дают возможность построения бесконечного числа логических связок. Основной аксиомой этих операций является ассоциативность, и свойства этих операций во многом определяются общими свойствами ассоциативных функций и операций, активно изучавшимися в математике.

В-третьих, рассмотрение логических операций конъюнкции и дизъюнкции как вещественных функций, являющихся компонентами нечетких моделей процессов и систем, естественно вызывает необходимость рассмотрения широкого класса таких функций, увеличивающих гибкость моделирования. По этим причинам, в ряде приложений нечеткой логики некоторые аксиомы t-норм и t-конорм также оказались ограничительными. В частности, параметрические классы этих операций имеют достаточно сложный вид для их аппаратной реализации и оптимизации нечетких моделей по параметрам этих операций. Сложность параметрических классов конъюнкций и дизъюнкций определяется способом генерации этих операций, который фактически определяется условием ассоциативности этих операций. С этой точки зрения свойство ассоциативности может рассматриваться как ограничительное. В то же время свойство коммутативности операций конъюнкции и дизъюнкции может рассматриваться как необязательное ограничение на эти операции, так как в общем случае в нечетких моделях операнды этих операций могут характеризовать переменные, по-разному влияющие на результат операции. Свойства ассоциативности и коммутативности являются важными, например, в нечетких моделях многокритериального принятия решений, поскольку одним из разумных требований, накладываемых на процедуры принятия решений, является их независимость от порядка рассмотрения альтернатив и критериев. Но для систем нечеткого вывода эти свойства не всегда являются необходимыми, особенно когда позиции переменных в нечетких правилах и процедуры обработки правил фиксированы, а также когда число входных переменных не превышает двух, что имеет место во многих реальных приложениях нечетких моделей. По этой причине из определения нечетких операций конъюнкции и дизъюнкции могут быть удалены свойства коммутативности и ассоциативности так же, как это было ранее сделано со свойством дистрибутивности.

Простейшие системы нечеткого логического вывода, имеющие широкие приложения, основаны на правилах вида:

R_i: *Если* X *есть* A_i *и* Y *есть* B_i *, то* Z *есть* C_i,
R_i: *Если* X *есть* A_i *и* Y *есть* B_i *, то* $z= f_i(x,y)$.

Здесь X, Y, Z – нечеткие переменные типа *ТЕМПЕРАТУРА, ДАВЛЕНИЕ, ПЛОТНОСТЬ,* A_i, B_i, C_i означают нечеткие значения этих переменных, например, *ОЧЕНЬ ВЫСОКАЯ, НИЗКОЕ, БОЛЬШАЯ,* определенные как нечеткие подмножества соответствующих множеств численных значений переменных, и f_i - некоторые вещественные функции. Нечеткие модели, основанные на правилах первого или второго типа, соответственно называются моделями Мамдани или Сугено. Для заданных вещественных значений x и y сила срабатывания правила w_i вычисляется как $w_i = T_1(\mu_{Ai}(x),\mu_{Bi}(y))$, где T_1 - это некоторая операция конъюнкции, представляющая связку «*и*», и $\mu_{Ai}(x)$, $\mu_{Bi}(y)$ суть значения принадлежности x и y нечетким множествам A_i и B_i. Заключение правил может быть вычислено как $\mu_{Ci}(z) =T_2(w_i,\mu_{Ci}(z))$, и $z_i=T_2(w_i,f_i(x,y))$, где T_2 это операция конъюнкции, используемая в операции импликации, и, возможно, отличная от T_1. Для агрегирования заключений, полученных по всем правилам, может использоваться некоторая операция дизъюнкции или агрегирования. Кроме того, в моделях Мамдани используется процедура преобразования нечеткого множества, полученного в результате логического вывода, в число, называемая процедурой дефаззификации. Построение оптимальных нечетких моделей традиционно основано как на тьюнинге (настройке) функций принадлежности нечетких множеств, используемых в правилах, так и на тьюнинге операций. Когда эти функции принадлежности и операции задаются параметрически, тогда этот тьюнинг может быть основан на оптимизации этих параметров.

Оптимизация моделей по параметрам операций может производиться вместо или дополнительно к оптимизации параметров нечетких множеств. Однако реализация этого подхода может оказаться достаточно трудоемкой ввиду сложного вида известных параметрических классов t-норм и t-конорм, используемых в качестве операций конъюнкции и дизъюнкции. Кроме этого, аппаратная реализация подобных операций также сложна. С этих точек зрения более простые параметрические классы операций конъюнкции и дизъюнкции имеют преимущества. Рассмотрение неассоциативных операций конъюнкции и дизъюнкции позволяет строить простые параметрические классы этих операций.

Легко увидеть, что ассоциативность операции конъюнкции не требуется, когда посылки правил содержат только по 2 переменные и используются разные операции конъюнкции T_1 и T_2. В общем случае, когда позиции переменных в посылках правил и процедура вычисления силы срабатывания правил фиксированы, ни условия ассоциативности, ни условия коммутативности операции конъюнкции не являются необходимыми. В этом случае конъюнкция нескольких аргументов может вычисляться последовательно в соответствии с заданным порядком переменных. Более того, некоммутативность и неассоциативность операций может быть желательна в ряде случаев. Например, если x и y означают «ошибка» и «изменение ошибки» соответственно, как это и бывает в системах нечеткого управления, тогда некоммутативность и неассоциативность конъюнкции может использоваться для учета различного влияния этих переменных на управляемый процесс. Таким образом, если коммутативность конъюнкции подразумевает равенство прав обоих операндов, то некоммутативность конъюнкции с фиксированным положением операндов дает возможность построения контекстно-зависимых операций. Мы можем предположить также, что параметрические операции T_1 и T_2. могут быть «зависимы от правил», что дает возможность отдельной настройки параметров этих операций для правил, относящихся к разным частям управляемого процесса, например, к точкам с максимальной или нулевой ошибкой и т.д.

В этой главе основное внимание уделяется неассоциативным операциям конъюнкции и их приложениям к задачам нечеткого моделирования. Понятия t-норм и t-конорм в настоящее время достаточно хорошо изучены, и в следующем разделе приводятся лишь основные сведения о них. В последующих разделах дается определение некоммутативных и неассоциативных операций конъюнкции и дизъюнкции и предлагаются различные способы генерации новых типов нечетких связок. Приводятся примеры параметрических операций конъюнкции, более простых, чем известные параметрические классы t-норм. В качестве примеров нечеткого моделирования рассматриваются задачи аппроксимации данных системами нечеткого вывода, основанные на оптимизации параметров неассоциативных операций конъюнкции.

2. *t*-нормы и *t*-конормы

Определение 2.1. Триангулярная норма (*t*-норма) T и триангулярная конорма (*t*-конорма) S определяются как функции $T,S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ такие, что для всех $x, y, z\in[0,1]$ выполняются следующие аксиомы:

$T(x,y) = T(y,x)$, $\quad S(x,y) = S(y,x)$ *(коммутативность)*,
$T(T(x,y),z) = T(x,T(y,z))$, $\quad S(S(x,y),z) = S(x,S(y,z))$ *(ассоциативность)*.
$T(x,y) \le T(x,z)$ и $S(x,y) \le S(x,z)$, если $y \le z$ *(монотонность)*,
$T(x,1) = x$, $\quad S(x,0) = x$ *(граничные условия)*.

Из определения 2.1 непосредственно следуют следующие граничные свойства этих операций:

$$T(0,x) = T(x,0) = 0, \qquad S(1,x) = S(x,1) = 1, \tag{1}$$
$$T(1,x) = x, \qquad S(0,x) = x \tag{2}$$

t-норма и *t*-конорма в определенном смысле являются двойственными понятиями. Эти функции могут быть получены друг из друга, например, с помощью инволютивного отрицания n и законов Де Моргана следующим образом:

$$S(x,y) = n(T(n(x),n(y))), \qquad T(x,y) = n(S(n(x),n(y))).$$

Простейшими примерами *t*-норм и *t*-конорм, взаимно связанных этими соотношениями для $n(x) = 1 - x$, являются следующие:

$T_M(x,y) = min\{x,y\}$ *(минимум)*,
$S_M(x,y) = max\{x,y\}$ *(максимум)*,

$T_P(x,y) = x\cdot y$ *(произведение)*,
$S_P(x,y) = x + y - x\cdot y$ *(вероятностная сумма)*,

$T_L(x,y) = max\{x+y-1, 0\}$ *(t-норма Лукасевича)*,
$S_L(x,y) = min\{x+y, 1\}$ *(t-конорма Лукасевича, ограниченная сумма)*,

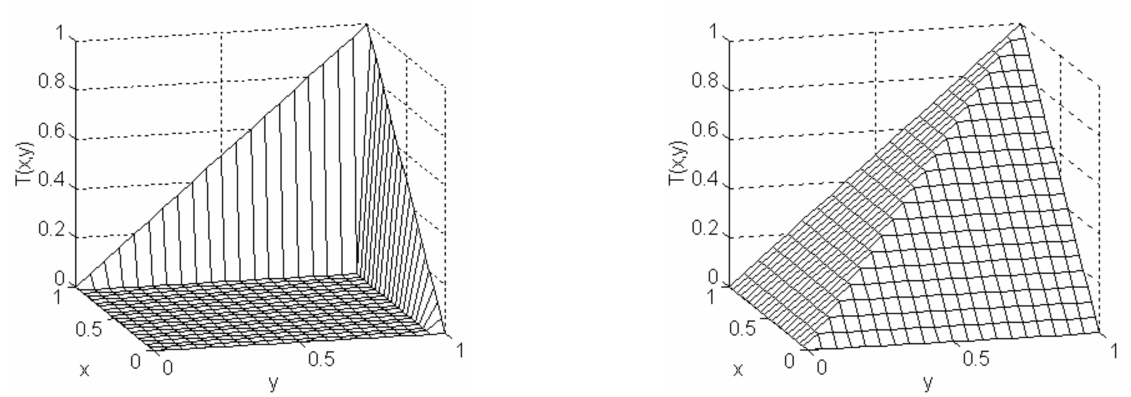
$$T_D(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{\textit{если} } (x,y)\in[0,1)\times[0,1) \\ \min(x,y), & \text{\textit{в противном случае}} \end{cases}$$ *(сильное произведение)*,

$$S_D(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{\textit{если} } (x,y)\in(0,1]\times(0,1] \\ \max(x,y), & \text{\textit{в противном случае}} \end{cases}$$ *(сильная сумма)*.

Эти простейшие функции будут в дальнейшем использованы для построения параметрических операций конъюнкции и дизъюнкции. Из приведенного определения для любых t-норм T и t-конорм S следует выполнение следующих неравенств:

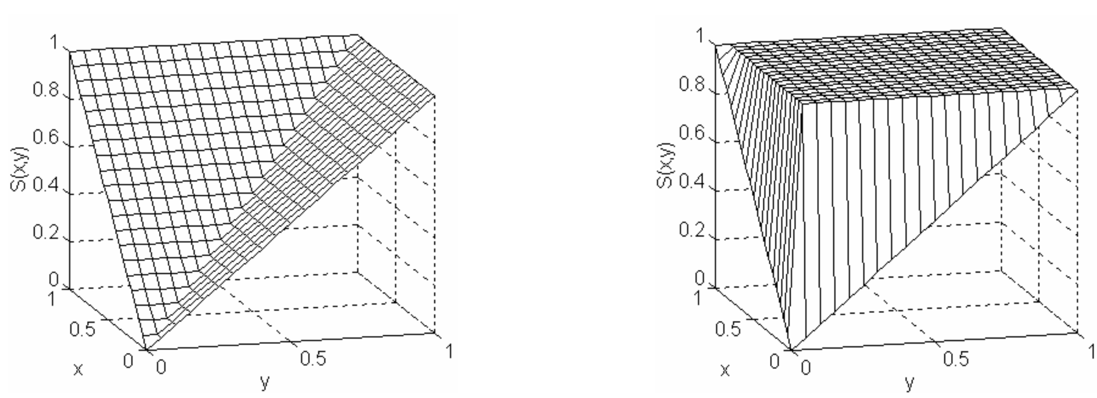
$$T_D(x,y) \le T(x,y) \le T_M(x,y) \le S_M(x,y) \le S(x,y) \le S_D(x,y).$$

Таким образом, t-нормы T_D и T_M являются минимальной и максимальной границами для всех t-норм. Аналогично, t-конормы S_M и S_D являются минимальной и максимальной границами для всех t-конорм. Эти неравенства очень важны с практической точки зрения, так как они устанавливают границы возможного варьирования операций T и S. На рис. 10 и рис. 11 представлены графики соответствующих t-норм и t-конорм.



а) б)

Рис. 10. а) t-норма T_D, б) t-норма T_M.
Для всех t-норм T выполняется: $T_D(x,y) \le T(x,y) \le T_M(x,y)$



а) б)

Рис. 11. а) t-конорма S_M, б) t-конорма S_D.
Для всех t-конорм S выполняется: $S_M(x,y) \le S(x,y) \le S_D(x,y)$

Определение 2.2. t-норма T и t-конорма S называются непрерывными, если эти функции являются непрерывными на их области определения, и они называются архимедовыми, если для всех $x \in (0,1)$ удовлетворяют, соответственно, следующим условиям:

$$T(x,x) < x, \qquad\qquad x < S(x,x).$$

Минимум и максимум являются непрерывными, но не архимедовыми, сильные произведение и сумма являются архимедовыми, но не непрерывными. Произведение, вероятностная сумма и операции Лукасевича являются непрерывными и архимедовыми.

t-нормы и t-конормы как функции, удовлетворяющие свойству ассоциативности, могут быть построены различным способом. Приведем без доказательств ряд теорем представления t-норм и t-конорм.

Теорема 2.3. t-норма T является непрерывной и архимедовой тогда и только тогда, когда существует строго убывающая и непрерывная функция f:$[0,1] \to [0,\infty]$, $f(1) = 0$, такая, что

$$T(x,y)=f^{(-1)}(f(x)+f(y)), \tag{3}$$

где $f^{(-1)}$ есть псевдообратная функция для f, определяемая как

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x), & \textit{если } x \le f(0) \\ 0, & \textit{в противном случае} \end{cases}.$$

Более того, представление (3) однозначно с точностью до положительной мультипликативной константы.

В условиях теоремы f называется аддитивным генератором t-нормы T, о которой, в свою очередь, говорят, что она генерируется с помощью f. Аддитивным генератором t-нормы Лукасевича является функция $f(x) = 1- x$ с псевдообратной функцией $f^{(-1)}(x) = max\{1 - x,\ 0\}$. Генератором произведения является функция $f(x) = - log(x)$.

Теорема 2.4. t-конорма S является непрерывной и архимедовой тогда и только тогда, когда существует строго возрастающая и непрерывная функция g:$[0,1] \to [0,\infty]$, $g(0) = 0$, такая, что

$$S(x,y)= g^{(-1)}(g(x)+g(y)), \tag{4}$$

где $g^{(-1)}$ есть псевдообратная функция для g, определяемая как

$$g^{(-1)}(x)=\begin{cases} g^{-1}(x), & \text{если } x\le g(1)\\ 1, & \text{в противном случае}\end{cases}.$$

Более того, представление (4) однозначно с точностью до положительной мультипликативной константы.

В условиях теоремы g называется аддитивным генератором t-конормы S, о которой, в свою очередь, говорят, что она генерируется с помощью g. Аддитивным генератором t-конормы Лукасевича является функция $g(x)= x$ с псевдообратной функцией $g^{(-1)}(x) = min\{x,1\}$. Генератором вероятностной суммы является функция $f(x) = - log(1 - x)$.

Определение 2.5. t-норма T имеет делители нуля, если существуют $x,y\in(0,1)$ такие, что $T(x,y) = 0$. T называется положительной, если из $x,y > 0$ следует $T(x,y) > 0$. t-конорма S называется нильпотентной, если существуют $x,y\in(0,1)$ такие, что $S(x,y) = 1$. T и S называются строгими, если они строго возрастающие по каждому аргументу на $(0,1)\times(0,1)$.

Очевидно, что минимум и произведение являются положительными t-нормами, в то время как сильное произведение и t-норма Лукасевича имеют делители нуля. Из этих t-норм единственной строгой t-нормой является произведение. Нетрудно увидеть, что непрерывная архимедова t-норма положительна тогда и только тогда, когда она строгая.

Аналогично, сильная сумма и t-конорма Лукасевича нильпотентны. Из рассмотренных выше примеров t-конорм только вероятностная сумма является строгой.

Предложение 2.6. Непрерывная архимедова t-норма T с аддитивным генератором f имеет делители нуля тогда и только тогда, когда $f(0) < +\infty$, и T – строгая тогда и только тогда, когда $f(0)=lim_{x\to 0}f(x)= +\infty$.

Предложение 2.7. Непрерывная архимедова t-конорма S с аддитивным генератором g является нильпотентной тогда и только тогда, когда $g(1) < +\infty$, и S – строгая тогда и только тогда, когда $g(1)=lim_{x\to 1}g(x)= +\infty$.

Далее биективные отрицания будут называться также строгими отрицаниями.

Теорема 2.8. Непрерывная t-норма T удовлетворяет условию $T(x,n(x))= 0$ для всех $x\in[0,1]$, где n – строгое отрицание на $[0,1]$, тогда и только тогда, когда существует автоморфизм φ интервала $[0,1]$ такой, что

$$T(x,y)= \varphi^{-1}(max\{\varphi(x)+\varphi(y)-1, 0\}),$$

и

$$n(x) \le \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)).$$

Теорема 2.9. Непрерывная t-конорма S удовлетворяет условию $S(x,n(x))=1$ для всех $x\in[0,1]$, где n – строгое отрицание, тогда и только тогда, когда существует автоморфизм φ интервала $[0,1]$ такой, что

$$S(x,y)=\varphi^{-1}(min\{\varphi(x)+\varphi(y),1\}),$$

и

$$n(x)\geq\varphi^{-1}(1-\varphi(x)).$$

Таким образом, все непрерывные t-нормы, для которых выполняется закон противоречия $T(x,n(x))=0$, и все непрерывные t-конормы, для которых выполняется закон исключенного третьего $S(x,n(x))=1$, изоморфны, соответственно, t-норме и t-конорме Лукасевича:

$$T(x,y)=\varphi^{-1}(T_L(\varphi(x),\varphi(y))),$$

$$S(x,y)=\varphi^{-1}(S_L(\varphi(x),\varphi(y))),$$

Заметим, что закону противоречия удовлетворяют t-норма Лукасевича и сильное произведение, а закону исключенного третьего удовлетворяют t-конорма Лукасевича и сильная сумма.

Теорема 2.10. Непрерывная t-норма T является строгой тогда и только тогда, когда существует автоморфизм φ интервала $[0,1]$ такой, что

$$T(x,y)=\varphi^{-1}(\varphi(x)\cdot\varphi(y)). \qquad (5)$$

t-норма T в (5) представлена в мультипликативной форме. Более обще, мультипликативным генератором t-нормы T называется строго возрастающая функция $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ такая, что φ -непрерывна справа в 0, $\varphi(1)=1$, $\varphi(x)\cdot\varphi(y)\in Ran(\varphi)\cup[0,\varphi(0)]$, где $Ran(\varphi)$ – область значений φ, и выполняется

$$T(x,y)=\varphi^{(-1)}(\varphi(x)\cdot\varphi(y)).$$

Теорема 2.11. Непрерывная t-конорма S является строгой тогда и только тогда, когда существует автоморфизм φ интервала $[0,1]$ такой, что

$$S(x,y)=\varphi^{-1}(\varphi(x)+\varphi(y)-\varphi(x)\cdot\varphi(y)). \qquad (6)$$

Соотношения (5) и (6) могут быть представлены в виде:

$$T(x,y)=\varphi^{-1}(T_P(\varphi(x),\varphi(y))),$$
$$S(x,y)=\varphi^{-1}(S_P(\varphi(x),\varphi(y))),$$

Таким образом, все непрерывные строгие t-нормы и t-конормы изоморфны, соответственно, произведению и вероятностной сумме.

Пусть T - t-норма, S - t-конорма, n_1 и n_2 – операции отрицания. Рассмотрим законы Де Моргана:

$$n_1(S(x,y)) = T(n_1(x),n_1(y)), \tag{7}$$
$$n_2(T(x,y)) = S(n_2(x),n_2(y)). \tag{8}$$

Предложение 2.12. Пусть n – строгое отрицание.

а) Для любой t-нормы T существует t-конорма S, определяемая соотношением

$$S(x,y) = n^{-1}(T(n(x),n(y))),$$

удовлетворяющая (7) с $n_1 = n$. Если T – непрерывная t-норма, то S – непрерывная t-конорма. Если T – архимедова с аддитивным генератором f, то S – архимедова с аддитивным генератором $g = f \circ n$ и $g(1) = f(0)$.

б) Для любой t-конормы S существует t-норма T, определяемая соотношением

$$T(x,y) = n^{-1}(S(n(x),n(y))),$$

удовлетворяющая (8) с $n_2 = n$. Если S – непрерывная t-конорма, то T – непрерывная t-норма. Если S – архимедова t-конорма с аддитивным генератором g, то T – архимедова t-норма с аддитивным генератором $f = g \circ n$ и $f(0) = g(1)$.

Определение 2.13. Триплетом Де Моргана называется тройка (T, S, n), где T - t-норма, S - t-конорма и n – строгое отрицание, такие, что для всех $x \in [0,1]$ выполняется (7) с $n_1 = n$. Триплет Де Моргана называется непрерывным, если T и S – непрерывные функции.

Триплет Де Моргана (T, S, n) называется сильным или типа Лукасевича, если существует автоморфизм φ интервала [0,1] такой, что

$$T(x,y) = \varphi^{-1}(max\{\varphi(x)+\varphi(y)-1, 0\}),$$
$$S(x,y) = \varphi^{-1}(min\{\varphi(x)+\varphi(y), 1\}),$$
$$n(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)).$$

Триплет Де Моргана (T, S, n) называется строгим или типа произведения, если существует автоморфизм φ интервала [0,1] такой, что

$$T(x,y) = \varphi^{-1}(\varphi(x), \varphi(y)),$$
$$S(x,y) = \varphi^{-1}(\varphi(x)+\varphi(y) - \varphi(x)\cdot\varphi(y)),$$
$$n(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)).$$

Предложение 2.14. Если φ – автоморфизм интервала [0,1], а T_1 и S_1 - t-норма и t-конорма соответственно, то следующие формулы

$$T(x,y) = \varphi^{-1}(T_1(\varphi(x),\varphi(y))),$$
$$S(x,y) = \varphi^{-1}(S_1(\varphi(x),\varphi(y))),$$

определяют t-норму T и t-конорму S, соответственно.

3. Параметрические классы *t*-норм и *t*-конорм

Приведем примеры параметрических классов t-норм и t-норм.

***t*-нормы и *t*-конормы Домби ($\lambda\in[0, \infty]$):**

$$T(x,y) = \frac{1}{1+\left(\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda}+\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}, \quad \text{если } \lambda\in(0, \infty),$$

$$T(x,y) = T_D(x,y), \quad \text{если } \lambda = 0,$$
$$T(x,y) = T_M(x,y), \quad \text{если } \lambda = \infty.$$

$$S(x,y) = 1-\frac{1}{1+\left(\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda}+\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}, \quad \text{если } \lambda\in(0, \infty),$$

$$S(x,y) = S_D(x,y), \quad \text{если } \lambda = 0,$$
$$S(x,y) = S_M(x,y), \quad \text{если } \lambda = \infty.$$

t-нормы Домби являются непрерывными, архимедовыми и строгими на $(0,\infty)$. Аддитивным и мультипликативным генераторами t-норм Домби на $(0,\infty)$ являются функции:

$$f(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda},$$

$$\varphi(x) = e^{-\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda}}.$$

t-нормы и t-конормы Франка ($\lambda \in [0, \infty]$):

$$T(x,y) = \log_{\lambda}\left(1 + \frac{(\lambda^x - 1)(\lambda^y - 1)}{\lambda - 1}\right), \qquad \text{если } \lambda \in (0,1) \cup (1,\infty),$$

$T(x,y) = T_M(x,y)$, если $\lambda = 0$,

$T(x,y) = T_P(x,y)$, если $\lambda = 1$,

$T(x,y) = T_L(x,y)$, если $\lambda = \infty$.

$$S(x,y) = 1 - \log_{\lambda}\left(1 + \frac{(\lambda^{1-x} - 1)(\lambda^{1-y} - 1)}{\lambda - 1}\right), \qquad \text{если } \lambda \in (0,1) \cup (1,\infty),$$

$S(x,y) = S_M(x,y)$, если $\lambda = 0$,

$S(x,y) = S_P(x,y)$, если $\lambda = 1$,

$S(x,y) = S_L(x,y)$, если $\lambda = \infty$.

t-нормы Франка являются непрерывными, архимедовыми и строгими на $(0,\infty)$. Аддитивным и мультипликативным генераторами t-норм Франка являются функции:

$$f(x) = \begin{cases} -\log x, & \text{если } \lambda = 1 \\ 1 - x, & \text{если } \lambda = \infty \\ \log \dfrac{\lambda - 1}{\lambda^x - 1}, & \text{если } \lambda \in (0,1) \cup (1,\infty) \end{cases},$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } \lambda = 1 \\ e^{x-1}, & \text{если } \lambda = \infty \\ \dfrac{\lambda^x - 1}{\lambda - 1}, & \text{если } \lambda \in (0,1) \cup (1,\infty) \end{cases}.$$

t-нормы и t-конормы Хамахера ($\lambda \in [0, \infty]$):

$$T(x,y) = \frac{xy}{\lambda + (1-\lambda)(x + y - xy)}, \qquad \text{если } \lambda \in [0,\infty) \text{ и } (\lambda,x,y) \neq (0,0,0),$$

$T(x,y) = T_D(x,y)$, если $\lambda = \infty$,

$T(x,y) = 0$, если $\lambda = x = y = 0$.

$S(x,y)=\dfrac{x+y+(\lambda-2)xy}{1+(\lambda-1)xy}$, если $\lambda\in(0,\infty)$ и $(\lambda,x,y)\neq(0,1,1)$,
$S(x,y) = S_D(x,y)$, если $\lambda = \infty$,
$S(x,y) = 1$, если $\lambda = 0$ и $x = y = 1$.

t-нормы Хамахера являются непрерывными, архимедовыми и строгими на $[0,\infty)$. Аддитивным и мультипликативным генераторами t-норм Хамахера являются функции:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{x}, & \textit{если } \lambda=0\\ \log\left(\dfrac{\lambda+(1-\lambda)x}{x}\right), & \textit{если } \lambda\in(0,\infty)\end{cases},$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}e^{\frac{x-1}{x}}, & \textit{если } \lambda=0\\ \dfrac{x}{\lambda+(1-\lambda)x}, & \textit{если } \lambda\in(0,\infty)\end{cases}.$$

***t*-нормы и *t*-конормы Швайцера-Скляра ($\lambda\in[-\infty,\infty]$):**

$T(x,y)=\left(\max((x^{\lambda}+y^{\lambda}-1),0)\right)^{\frac{1}{\lambda}}$, если $\lambda\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$,
$T(x,y) = T_M(x,y)$, если $\lambda = -\infty$,
$T(x,y) = T_P(x,y)$, если $\lambda = 0$,
$T(x,y) = T_D(x,y)$, если $\lambda = \infty$.

$S(x,y)=1-\left(\max(((1-x)^{\lambda}+(1-y)^{\lambda}-1),0)\right)^{\frac{1}{\lambda}}$, если $\lambda\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$,
$S(x,y) = S_M(x,y)$, если $\lambda = -\infty$,
$S(x,y) = S_P(x,y)$, если $\lambda = 0$,
$S(x,y) = S_D(x,y)$, если $\lambda = \infty$.

t-нормы Швайцера-Скляра являются непрерывными и архимедовыми на $(-\infty,\infty)$, строгими на $(-\infty,0]$, нильпотентными на $(0,\infty)$. Аддитивным и мультипликативным генераторами t-норм Швайцера-Скляра являются функции:

$$f(x)=\begin{cases}-\log x, & \text{если } \lambda=0\\ \dfrac{1-x^{\lambda}}{\lambda}, & \text{если } \lambda\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)\end{cases},$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}x, & \text{если } \lambda=0\\ e^{\frac{x^{\lambda}-1}{\lambda}}, & \text{если } \lambda\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)\end{cases}.$$

***t*-нормы и *t*-конормы Ягера ($\lambda\in[0,\infty]$):**

$T(x,y)=\max(1-((1-x)^{\lambda}+(1-y)^{\lambda})^{\frac{1}{\lambda}},0)$, если $\lambda\in(0,\infty)$,
$T(x,y)=T_D(x,y)$, если $\lambda=0$,
$T(x,y)=T_M(x,y)$, если $\lambda=\infty$.

$S(x,y)=\min((x^{\lambda}+y^{\lambda})^{\frac{1}{\lambda}},1)$, если $\lambda\in(0,\infty)$,
$S(x,y)=S_D(x,y)$, если $\lambda=0$,
$S(x,y)=S_M(x,y)$, если $\lambda=\infty$.

t-нормы Ягера являются непрерывными и архимедовыми на $(0,\infty)$, нильпотентными на $(0,\infty)$. Аддитивным и мультипликативным генераторами *t*-норм Ягера являются функции:

$$f(x)=(1-x)^{\lambda},\qquad \varphi(x)=e^{-(1-x)^{\lambda}}.$$

***t*-нормы и *t*-конормы Майора-Торренса ($\lambda\in[0,1]$):**

$$T(x,y)=\begin{cases}\max(x+y-\lambda,0), & \text{если } \lambda\in(0,1] \text{ и } (x,y)\in[0,\lambda]\times[0,\lambda]\\ \min(x,y), & \text{если } \lambda=0 \text{ или } x>\lambda \text{ или } y>\lambda\end{cases}.$$

$$S(x,y)=\begin{cases}\min(x+y+\lambda-1,1), & \text{если } \lambda\in(0,1] \text{ и } (x,y)\in[1-\lambda,1]\times[1-\lambda,1]\\ \max(x,y), & \text{если } \lambda=0 \text{ или } x<1-\lambda \text{ или } y<1-\lambda\end{cases}.$$

t-нормы Майора-Торренса являются непрерывными на [0,1], архимедовыми и нильпотентными при $\lambda=1$. Аддитивным и мультипликативным генераторами *t*-норм Майора-Торренса являются функции:

$$f(x)=1-x,\qquad \varphi(x)=e^{x-1}.$$

4. Обобщенные операции конъюнкции и дизъюнкции

В первом разделе ставилась задача построения простых параметрических классов конъюнкций и дизъюнкций, пригодных для оптимизации нечетких моделей по параметрам этих операций. Как это видно из предыдущего раздела, параметрические классы *t*-норм и *t*-конорм достаточно сложны для их использования в задачах оптимизации нечетких моделей. В этом и последующих разделах нас будут интересовать методы построения простых параметрических классов конъюнкций и дизъюнкций, варьирующих в определенном диапазоне и удобных для их использования в задачах оптимизации нечетких моделей. Все методы генерации *t*-норм и *t*-конорм, рассмотренные в разделе 2, основаны на использовании (псевдо-) обратных функций от генераторов. Это и является причиной сложного вида генерируемых операций. В то же время, как это следует из теории ассоциативных функций, рассмотренные выше методы представления *t*-норм и *t*-конорм, как функций, генерируемых аддитивными или мультипликативными генераторами, являются общим свойством ассоциативных функций. Следовательно, для получения простых параметрических классов конъюнкций и дизъюнкций необходимо рассматривать неассоциативные операции.

Определение 4.1. Операциями конъюнкции T и дизъюнкции S называются функции T,S:$[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ такие, что для всех $x,y\in[0,1]$ выполняются следующие свойства:

$$T(x,1) = T(1,x) = x, \qquad\qquad S(x,0) = S(0,x) = x, \tag{9}$$

$$T(x,y) \le T(u,v) \text{ и } S(x,y) \le S(u,v), \text{ если } x \le u,\ y \le v. \tag{10}$$

Ясно, что любые *t*-норма и *t*-конорма соответственно являются конъюнкцией и дизъюнкцией. Очевидны следующие свойства введенных операций.

$$T(0,x) = T(x,0) = 0, \qquad\qquad S(1,x) = S(x,1) = 1, \tag{11}$$

$$T_D(x,y) \le T(x,y) \le T_M(x,y) \le S_M(x,y) \le S(x,y) \le S_D(x,y). \tag{12}$$

Аналог предложения 2.12 также имеет место для определенных выше конъюнкций и дизъюнкций, а именно, если n – строгое отрицание, а T, S – конъюнкция и дизъюнкция, то с их помощью можно определить соответственно дизъюнкцию S_T и конъюнкцию T_S:

$$S_T(x,y) = n^{-1}(T(n(x), n(y))), \tag{13}$$

$$T_S(x,y) = n^{-1}(S(n(x), n(y))). \tag{14}$$

Если n инволютивное отрицание, то для любой конъюнкции T и дизъюнкции $S = S_T$, (для любой S и $T = T_S$) выполняются законы Де Моргана:

$$n(S(x,y)) = T(n(x), n(y)), \qquad n(T(x,y)) = S(n(x), n(y)).$$

Ниже вводятся две функции, которые будут использоваться для генерации конъюнкции и дизъюнкции.

Определение 4.2. Функции $t,s:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ такие, что для всех $x,y\in[0,1]$ выполняются следующие свойства:

$$t(0,x) = t(x,0) = 0, \qquad s(1,x) = s(x,1) = 1, \tag{15}$$

$$t(x,y) \le t(u,v) \quad \text{и} \quad s(x,y) \le s(u,v), \text{ если } x \le u,\ y \le v, \tag{16}$$

соответственно будут называться псевдоконъюнкцией и псевдодизъюнкцией.

Очевидно, что любая конъюнкция (дизъюнкция) будет псевдоконъюнкцией (псевдодизъюнкцией).

Теорема 4.3. Пусть T_1, T_2 – конъюнкции, t – псевдоконъюнкция, S_1 и S_2 – дизъюнкции и s – псевдодизъюнкция, тогда следующие функции

$$T_3(x,y) = T_2(T_1(x,y),s(x,y)), \qquad T_4(x,y) = T_2(s(x,y),T_1(x,y)), \tag{17}$$

$$S_3(x,y) = S_2(S_1(x,y), t(x,y)), \qquad S_4(x,y) = S_2(t(x,y), S_1(x,y)), \tag{18}$$

соответственно будут конъюнкцией и дизъюнкцией.

Доказательство: $T_3(x,1) = T_2(T_1(x,1),s(x,1)) = T_2(x,1) = x$; $T_3(1,y) = T_2(T_1(1,y),s(1,y)) = T_2(y,1) = y$. Монотонность T_3 следует из монотонности T_1, T_2 и s. Аналогично показывается, что T_4 – конъюнкция, а S_3, S_4 - дизъюнкции.

В общем случае, ввиду некоммутативности (псевдо-) конъюнкций и (псевдо-) дизъюнкций, левые и правые формулы в (17), (18) определяют разные функции. Однако ясно, что свойства «левосторонних» и «правосторонних» функций (17), (18) аналогичны, поэтому в дальнейшем будет рассматриваться только один из вариантов возможных функций.

Конъюнкции (17) обладают следующими свойствами.

Предложение 4.4.

$T(T_D, s) = T_D$ для любых конъюнкций T и псевдодизъюнкций s;

$T_D(T, s) = T_D$ для любых конъюнкций T и псевдодизъюнкций s таких, что $s(x,y) < 1$, если $x,y < 1$;

$T_M(T, S) = T$ для любых конъюнкций T и дизъюнкций S;

$T(T_M, S_M) = T$ для любых коммутативных конъюнкций T;

$T_L(T, S) = T_L$ для всех пар (T,S) операторов (T_M, S_M), (T_P, S_P), и (T_L, S_L).

Доказательство: Из (15) и теоремы 4.3 следует, что достаточно рассмотреть случаи, когда $x,y < 1$.

$T(T_D(x,y),s(x,y)) = T(0,s(x,y)) = 0 = T_D(x,y)$.

$T_D(T(x,y),s(x,y)) = 0 = T_D(x,y)$, так как $T(x,y) \leq min(x,y) < 1$ и $s(x,y) < 1$ для $x,y < 1$.

Из (12) имеем $T_M(T(x,y), S(x,y)) = min(T(x,y),S(x,y)) = T(x,y)$.

Из коммутативности T следует $T(T_M(x,y),S_M(x,y)) = T(min(x,y),max(x,y)) = T(x,y)$.

Покажем, что $T_L(T(x,y),S(x,y)) = max(0,T(x,y) + S(x,y) - 1) = T_L(x,y)$. Достаточно показать, что $T(x,y) + S(x,y) = x + y$ для всех рассматриваемых пар операторов T, S. $T_M(x,y) + S_M(x,y) = min(x,y) + max(x,y) = x + y$. $T_P(x,y) + S_P(x,y) = xy + x + y - xy = x + y$. $T_L(x,y) + S_L(x,y) = max(0, x + y - 1) + min(1, x+ y) = x+y$ для обоих возможностей $x + y < 1$ и $x + y \geq 1$.

Аналогично доказываются следующие свойства дизъюнкций (18).

Предложение 4.5.

$S(t,S_D) =$	S_D	для всех псевдоконъюнкций t и дизъюнкций S;
$S_D(t,S) =$	S_D	для всех дизъюнкций S и всех псевдоконъюнкций t таких, что $t(x,y) > 0$, если $x,y > 0$;
$S_M(T,S) =$	S	для всех конъюнкций T и дизъюнкций S;
$S(T_M,S_M) =$	S	для всех коммутативных дизъюнкций S;
$S_L(T,S) =$	S_L	для всех пар (T,S) операторов (T_M, S_M), (T_P, S_P) и (T_L, S_L).

Как это следует из теоремы 4.3, операции конъюнкции и дизъюнкции могут строиться из хорошо известных t-норм и t-конорм используемых как (псевдо-) конъюнкции и (псевдо-) дизъюнкции. Но для получения новых операторов необходимо учитывать предложения 4.4 и 4.5. Например, из T_M, T_P, S_M, S_P могут быть получены следующие коммутативные операции конъюнкции и дизъюнкции, связанные друг с другом законами Де Моргана с отрицанием Заде:

$$T(x,y) = (x+y - xy)min(x,y), \qquad S(x,y) = max(x,y)+xy - max(x,y)xy,$$
$$T(x,y) = max(x,y)xy, \qquad S(x,y)= min(x,y)+x+y - xy - min(x,y)(x+y - xy),$$
$$T(x,y) = xy(x+y - xy), \qquad S(x,y) = x+y - xy(x+y - xy).$$

Для получения более интересных параметрических классов конъюнкций и дизъюнкций можно использовать в (17) и (18) псевдоконъюнкции и псевдодизъюнкции, отличные от t-норм и t-конорм.

Предложение 4.6. Если n отрицание на [0,1], а t, s – некоторые псевдоконъюнкция и псевдодизъюнкция, тогда следующие соотношения определяют, соответственно, псевдодизъюнкцию и псевдоконъюнкцию:

$$s_t(x,y) = n(t(n(x), n(y))), \qquad t_s(x,y) = n(s(n(x), n(y))).$$

Доказательство: $s_t(x,1) = n(t(n(x),n(1))) = n(t(n(x),0)) = n(0) = 1$. Аналогично получим $s_t(1,x) = 1$. Так как t монотонно возрастает по обоим аргументам, и n монотонно убывающая функция, мы получаем свойство монотонности для s_t. Доказательство для t_s аналогично.

Заметим, что если в (11) отрицание n инволюция, то псевдосвязки t и $s = s_t$, s и $t = t_s$ будут взаимно связаны законом Де Моргана. Мы будем рассматривать следующие пары псевдосвязок, взаимно связанных отрицанием $n(x) = 1 - x$:

$t_B(x,y) = 0$ для всех $x,y \in [0,1]$, $s_B(x,y) = 1$ для всех $x,y \in [0,1]$.

$$t_D(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x,y) \in (0,1] \times (0,1] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases},$$

$$s_D(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x,y) \in [0,1) \times [0,1) \\ 1, & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

$$t_X(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y = 0 \\ x, & \text{если} \quad y \neq 0 \end{cases}, \qquad s_X(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad y = 1 \\ y, & \text{если} \quad y \neq 1 \end{cases}.$$

$$t_Y(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = 0 \\ y, & \text{если} \quad x \neq 0 \end{cases}, \qquad s_Y(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = 1 \\ y, & \text{если} \quad x \neq 1 \end{cases}.$$

Пусть t - псевдоконъюнкция, а s - псевдодизъюнкция. Легко показать, что для всех $x,y \in [0,1]$ выполняется:

$$t_B(x,y) \leq t(x,y) \leq t_D(x,y), \qquad s_D(x,y) \leq s(x,y) \leq s_B(x,y).$$

Любая псевдоконъюнкция t отличается от любой псевдодизъюнкции s по крайней мере в двух точках (0,1) и (1,0), так как:

$$t(0,1) = t(1,0) = 0, \qquad s(0,1) = s(1,0) = 1.$$

Предложение 4.7. Пусть s - некоторая параметрическая псевдодизъюнкция, варьирующая от s_D до s_B, и T_1 – произвольная конъюнкция, тогда с помощью любой конъюнкции T_2, применяя (17), можно построить конъюнкции, варьирующие от T_D до T_1.

Доказательство: Из (17) имеем: $T_2(T_1(x,y),s_B(x,y)) = T_2(T_1(x,y),1) = T_1(x,y)$. Обозначим $T(x,y) = T_2(T_1(x,y),s_D(x,y))$. Если $x = 1$, тогда $T(1,y) = T_2(T_1(1,y),s_D(1,y)) = T_2(y,1) = y$. Если $y = 1$, то аналогично получим $T(x,1) =$

x. Если $x \neq 1$ и $y \neq 1$, то $T(x,y) = T_2(T_1(x,y),s_D(x,y)) = T_2(T_1(x,y),0) = 0$. Следовательно, $T = T_D$. Таким образом, из $s = s_B$ и $s = s_D$ с помощью (17) получим T_1 и T_D, соответственно. Предположим, варьируя параметр в s, можно построить псевдодизъюнкции s_a и s_b такие, что $s_a \leq s_b$. Обозначим конъюнкции, полученные по (17) на основе s_a и s_b, как T_a и T_b, соответственно. Тогда имеем $s_D \leq s_a \leq s_b \leq s_B$, и из монотонности всех функций в (17) следует $T_D \leq T_a \leq T_b \leq T_1$.

Как следует из предложения, если построить параметрический класс псевдодизъюнкций s, варьирующих от s_D до s_B, то, применяя s и $T_1 = T_M$ в (17), можно варьировать конъюнкции во всем диапозоне от T_D до T_M. Конечно, типы конъюнкций, генерируемых между T_D и T_M, будут зависеть от формы s и T_2.

Двойственно можно сформулировать следующее предложение.

Предложение 4.8. Пусть t - параметрическая псевдоконъюнкция, варьирующая от t_B до t_D, и S_1 произвольная дизъюнкция, тогда с помощью любой дизъюнкции S_2, применяя (18), можно построить дизъюнкции, варьирующие от S_1 до S_D.

Из этих предложений следует, что для генерации параметрических классов конъюнкций и дизъюнкций достаточно генерировать подходящий класс псевдоопераций. Этот вопрос рассматривается в следующем разделе.

Предложение 4.9. Пусть t_1 и t_2 - псевдоконъюнкции, s_1 и s_2 - псевдодизъюнкции, f_1, f_2, g_1, g_2, h:[0,1]→[0,1] суть неубывающие функции такие, что $f_1(0) = f_2(0) = 0$, $g_1(1) = g_2(1) = 1$, тогда следующие функции

$$t_3(x,y) = t_1(f_1(x), f_2(y)), \qquad s_3(x,y) = s_1(g_1(x), g_2(y)), \tag{19}$$
$$t_4(x,y) = f_1(t_1(x,y)), \qquad s_4(x,y) = g_1(s_1(x,y)), \tag{20}$$
$$t_5(x,y) = t_2(t_1(x,y), h(y)), \qquad s_5(x,y) = s_2(s_1(x,y), h(y)), \tag{21}$$
$$t_6(x,y) = t_2(h(x), t_1(x,y)), \qquad s_6(x,y) = s_2(h(x), s_1(x,y)), \tag{22}$$

будут псевдоконъюнкциями и псевдодизъюнкциями соответственно.

Доказательство: Из $f_1(0) = f_2(0) = 0$, и из выполнения (15) для t_1 и t_2 получим выполнение (15) для функций t в (19) - (20). Монотонность функций t следует из монотонности t_1, t_2 , f_1, f_2 и h. Доказательство для псевдодизъюнкций аналогично.

Заметим, что из-за возможной некоммутативности функций f_1, f_2, g_1, g_2 функции (21) и (22) могут быть различными.

Многократное рекурсивное применение (19) - (22) дает возможность строить различные псевдоконъюнкции и псевдодизъюнкции и затем с помощью теоремы 4.3 и предложения 4.6 - различные конъюнкции и дизъюнкции.

Функции f и g, определенные в предложении 4.9, будут называться f- и g-генераторами, соответственно. Легко увидеть, что посредством любого отрицания n можно получить из f-генератора некоторый g-генератор и, наоборот:

$$g(x) = n(f(n(x))), \qquad f(x) = n(g(n(x))).$$

Например, применяя (17) и (19), можно получить конъюнкцию:

$$T(x,y) = T_2(T_1(x,y),s(g_1(x,p_1), g_2(y,p_2))),$$

где T_2, T_1 - некоторые конъюнкции, s - псевдодизъюнкция и $g_1(x,p_1)$, $g_2(y,p_2)$ - некоторые генераторы, зависящие от параметров p_1, p_2. Для получения более или менее простых параметрических классов конъюнкций мы можем выбрать T_2, T_1 среди t-норм T_M, T_P, T_D, T_L, выбрать s среди t-конорм S_M, S_P, S_D, S_L и использовать простые функции g_1 и g_2.

Далее в основном рассматриваются операции конъюнкции. Соответствующие операции дизъюнкции могут быть получены двойственно или из операции конъюнкции с помощью операции отрицания.

Рассмотрим следующие генераторы:

$$f_B(x) = 0 \quad \text{для всех } x\in[0,1], \qquad g_B(x) = 1 \quad \text{для всех } x\in[0,1].$$

$$f_D(x) = \begin{cases} 0, & если \quad x = 0 \\ 1, & если \quad x \neq 0 \end{cases}, \qquad g_D(x) = \begin{cases} 1, & если \quad x = 1 \\ 0, & если \quad x \neq 1 \end{cases}.$$

Очевидно, что для любых f- и g-генераторов выполняется:

$$f_B(x) \le f(x) \le f_D(x), \qquad g_D(x) \le g(x) \le g_B(x).$$

Принимая во внимание, что следующие функции

$$f_x(x) = x, \qquad g_x(x) = x,$$

также являются генераторами, в (19) - (22) можно заменить генераторы и функции h их аргументами.

Легко видеть, что подставляя $t_1 = T$ и $s_1 = S$ в (19), получим для произвольной конъюнкции T, дизъюнкции S и для любых генераторов f и g следующие соотношения:

$$T(f_B(x), f(y)) = T(f(x),f_B(y)) = t_B(x,y), \qquad S(g_B(x),g(y)) = S(g(x),g_B(y)) = s_B(x,y),$$
$$T(f_D(x), f_D(y)) = t_D(x,y), \qquad S(g_D(x),g_D(y)) = s_D(x,y),$$
$$T(f_D(x),y) = t_y(x,y), \qquad S(g_D(x),y) = s_y(x,y),$$
$$T(x, f_D(y)) = t_x(x,y), \qquad S(x,g_D(y)) = s_x(x,y).$$

Принимая эти соотношения во внимание, из предложения 4.7 получим следующий способ построения конъюнкций.

Теорема 4.10. Пусть T_1 и T_2 - конъюнкции, S - дизъюнкция, g_1 и g_2 - параметрические классы g-генераторов такие, что один из них варьирует от g_D до g_B, а другой от g_D до некоторого g^*, тогда с помощью соотношения

$$T(x,y) = T_2(T_1(x,y),S(g_1(x),g_2(y))) \qquad (23)$$

мы сможем сгенерировать конъюнкции, варьирующие от T_D до T_1.

5. Примеры параметрических классов обобщенных конъюнкций

Пример 5.1. Рассмотрим следующие параметрические классы генераторов, зависящих от порога $p\in[0,1]$:

$$f(x,p) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le p \\ 1, & \text{если} \quad p < x \end{cases}, \qquad g(x,p) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < p \\ 1, & \text{если} \quad p \le x \end{cases},$$

со следующими свойствами:

$$f_B(x) = f(x,1) \le f(x,p) \le f(x,0) = f_D(x),$$
$$g_D(x) = g(x,1) \le g(x,p) \le g(x,0) = g_B(x).$$

Для любого T и S выполняется:

$$T(f(x,p),f(y,q)) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le p \text{ или } y \le q \\ 1, & \text{в противном случае} \end{cases},$$

$$S(g(x,p),g(y,q)) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad p \le x \text{ или } q \le y \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Применяя в (23) $T_1 = T_M$ и генераторы $g(x,p)$ и $g(y,q)$, для произвольных T_2 и S получим следующую операцию конъюнкции:

$$T(x,y) = \begin{cases} \min(x,y), & \text{если} \quad p \le x \text{ или } q \le y \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases},$$

и, в частности, $T = T_D$ при $p = 1$, $q = 1$, и $T = T_M$ при $p = 0$ или $q = 0$. График этой конъюнкции для $p = 0.4$, $q = 0.8$ показан на рис. 12.

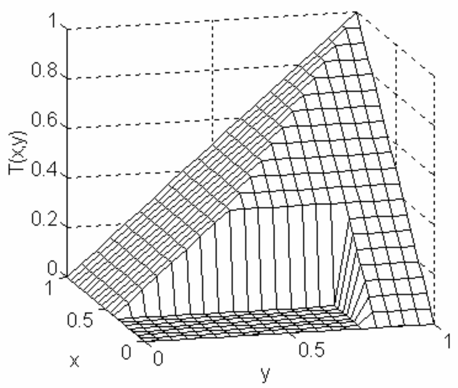


Рис. 12. Конъюнкция для p = 0.4, q = 0.8 из примера 5.1

Пример 5.2. Рассмотрим параметрические классы линейных генераторов ($p \geq 0$):

$$f(x,p) = min(px,1), \qquad g(x,p) = max(1\text{-}p(1\text{-}x), 0),$$

Для этих генераторов выполняется:

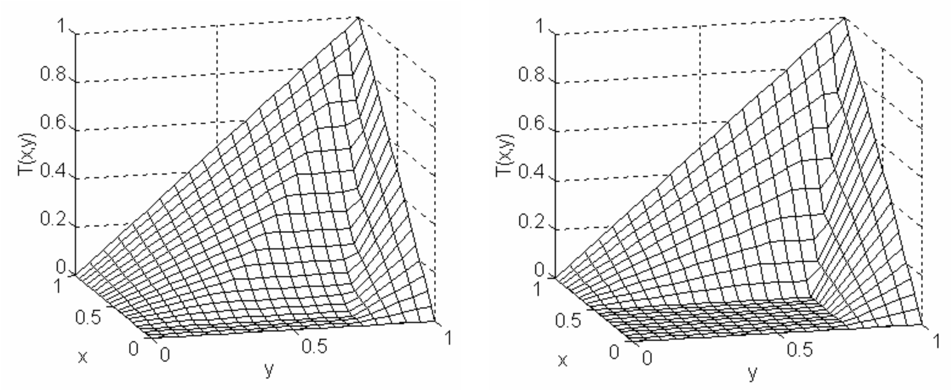
$$f_B(x) = f(x,0) \leq f(x,p) \leq f(x,\infty) = f_D(x),$$
$$g_D(x) = g(x,\infty) \leq g(x,p) \leq g(x,0) = g_B(x),$$

где $f(x,\infty) = lim_{p\to\infty} f(x,p)$, и $g(x,\infty) = lim_{p\to\infty} g(x,p)$.

Применяя в (23) $T_1 = T_M$, $T_2 = T_P$ и $S = S_M$, получим конъюнкцию:

$$T(x,y) = min(x,y)\cdot max\{1\text{-}\ p(1 - x), 1 - q(1 - y),\ 0\},$$

причем, $T = T_M$ при $p = 0$, и $T \to T_D$ когда p, $q \to \infty$. Графики этой конъюнкции для p = 1.2, q= 4 и для p = 2 и q = 4 показаны на рис. 13.



а) б)

Рис. 13. Конъюнкция из примера 5.2:
а) для p = 1.2, q = 4; б) для p = 2, q = 4

Пример 5.3. Рассмотрим параметрические классы степенных генераторов ($p \geq 0$):

$$f(x,p) = x^p, \qquad g(x,p) = x^p,$$

где предполагается, что $0^p = 0$ для всех $p > 0$, $f(0,0) = 0$, $f(1,\infty) = 0$, но $g(0,0)=1$, $g(1,\infty)= 1$. Тогда имеем

$$f_B(x) = f(x,\infty) \leq f(x,p) \leq f(x,0) = f_D(x),$$
$$g_D(x) = g(x,\infty) \leq g(x,p) \leq g(x,0) = g_B(x).$$

С помощью этих генераторов можно получить много конъюнкций с интересными свойствами. Например, из теоремы 4.10 следует, что применяя эти генераторы в (23) с $T_1 = T_M$ мы получим параметрические классы конъюнкций, варьирующих от T_M (при $p,q \to 0$) до T_D (когда $p,q \to \infty$). Рассмотрим примеры конъюнкций, основанных на степенных генераторах.

Пример 5.3.1. Для $T_2 = T_M$ и $S = S_M$ получим следующую конъюнкцию:

$$T(x,y) = min\{min(x,y),\ max(x^p,y^q)\}.$$

При $p,\ q \leq 1$ имеем $T = T_M$. График этой конъюнкции для $p = 2$ и $q = 4$ приведен на рис. 14.

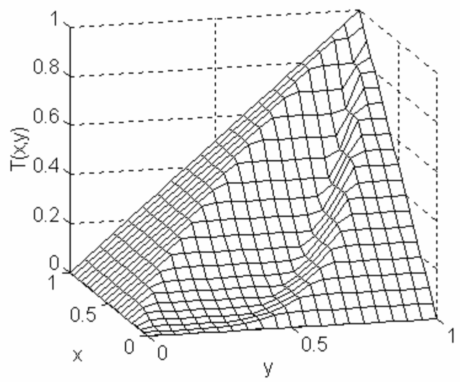


Рис. 14. Конъюнкция для $p = 2$, $q = 4$ из примера 5.3.1

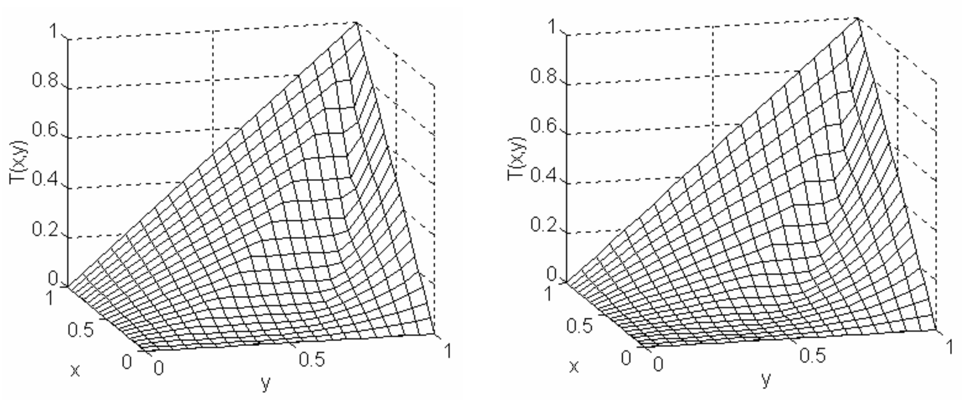
При $p = q$ эта конъюнкция имеет следующий вид:

$$T(x,y) = \begin{cases} \min(x^p, y), & если \quad y < x \\ \min(x, y^p), & если \quad x \leq y \end{cases}.$$

Пример 5.3.2: Для $T_2 = T_P$ и $S = S_M$ получим другую конъюнкцию:

$$T(x,y) = min(x,y) \cdot max(x^p, y^q).$$

Графики этой конъюнкции для $p = 1.2$, $q = 4$ и для $p = 2$, $q = 4$ показаны на рис. 15.



а) б)

Рис. 15. Конъюнкция из примера 5.3.2:
а) для $p = 1.2$, $q = 4$; б) для $p = 2$, $q = 4$

При $p = q$ эта конъюнкция имеет следующий вид:

$$T(x,y) = \begin{cases} yx^p, & если\ y < x \\ xy^p, & если\ x \le y \end{cases}.$$

При $p = q = 1$ получим $T = T_P$.

Пример 5.3.3: Для $T_2 = T_P$ и $S = S_P$ получим новую конъюнкцию:

$$T(x,y) = min(x,y) \cdot (x^p + y^q - x^p y^q).$$

График этой конъюнкции для $p = 1.2$, $q = 4$ приведен на рис. 16.

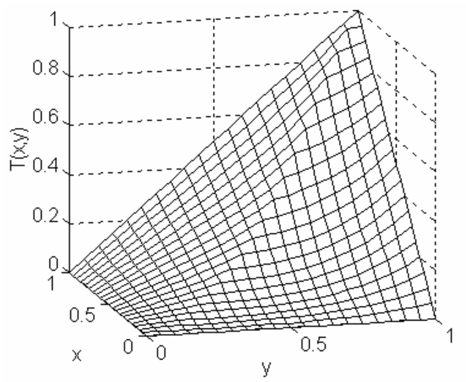


Рис. 16. Конъюнкция из примера 5.3.3 для $p = 1.2$, $q = 4$

Пример 5.3.4. Для $T_2 = T_P$ и $S = S_L$ получим следующую конъюнкцию:

$$T(x,y) = min(x,y)\cdot min(1,x^p+y^q).$$

График этой конъюнкции для $p = 0.8$, $q = 4$ показан на рис. 17.

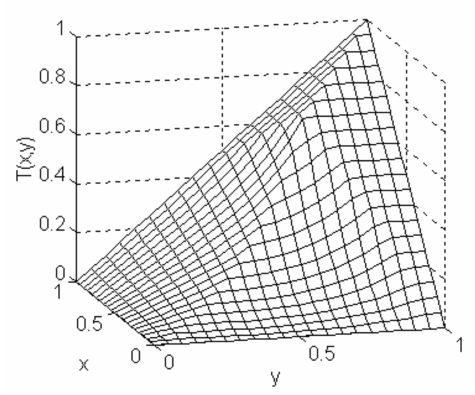


Рис. 17. Конъюнкция для $p = 0.8$, $q = 4$ из примера 5.3.4.

Пример 5.3.5. Для $T_2 = T_M$, $S = S_M$ и двух генераторов $g_D(x)$ и y^q получим следующую конъюнкцию:

$$T(x,y) = min\{min(x,y), max(g_D(x),y^q)\}.$$

Имеем $T(x,y) = T_M$ для $q \le 1$ и $T(x,y) \to T_D$ когда $q \to \infty$. Для $q \ge 1$ эта конъюнкция может быть представлена в виде:

$$T(x,y) = \begin{cases} y, & \text{если } x = 1 \\ \min(x, y^q), & \text{если } x \ne 1 \end{cases}.$$

График этой конъюнкции для $q = 2$ показан на рис. 18.

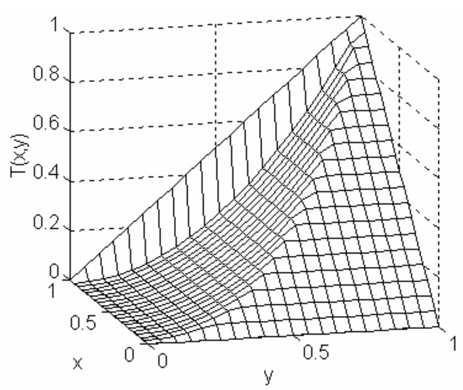


Рис. 18. Конъюнкция из примера 5.3.5 для $q = 2$.

Пример 5.4. До этого рассматривались конъюнкции, основанные на формулах (17) и (19). Другие типы конъюнкций могут быть основаны на формулах (17) и (20). Например, с помощью генератора $g(x,p) = x^p$ и T-норм $T_2 = T_P$ и $T_1 = T_M$ можно получить следующую конъюнкцию:

$$T(x,y) = min(x,y)\cdot(x + y - xy)^p,$$

варьирующую от T_M (при $p = 0$) до T_D (при $p\to\infty$).

Пример 5.5. Рассмотрим другой параметрический класс конъюнкций, основанный на представлениях (17) и (21) с $T_1 = T_M$, $T_2 = T_P$, $s_1 = s_D$, $h(y)= y^p$, $s_2 = S_M$:

$$T(x,y) = min(x,y)\cdot max(s_D(x,y),y^p) = \begin{cases} \min(x,y), & \text{\textit{если}} \max(x,y) = 1 \\ \min(x,y)\cdot y^p, & \text{\textit{если}} \max(x,y) < 1 \end{cases}.$$

Имеем $T = T_M$ при $p = 0$ и $T = T_D$ при $p\to\infty$. График этой конъюнкции для $q = 2$ показан на рис. 19.

Ниже приводятся конъюнкции, основанные на $T_1 = T_P$:

$$T(x,y) = (xy)\cdot max(x^p,y^q),$$
$$T(x,y) = xy(x^p + y^q - x^p y^q),$$
$$T(x,y) = (xy)\cdot min(1, x^p + y^q).$$

Эти конъюнкции варьируют от T_P до T_D.

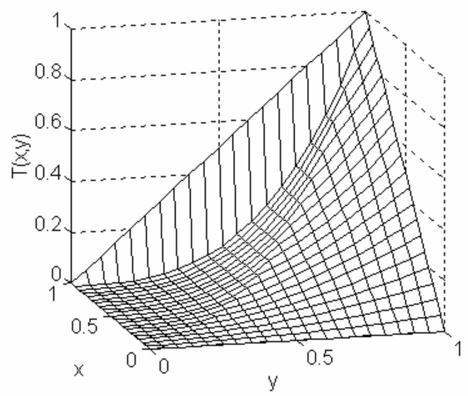


Рис. 19. Конъюнкция из примера 5.5 для $q = 2$

Следующая конъюнкция основана на представлениях (17) и (21) с $T_1= T_M$, $T_2 = T_P$, $s_1 = s_2 = S_M$, $h(y) = p$, ($p\in[0,1]$) и варьирует от $T = T_M$ при $p = 1$ до $T = T_P$ при $p = 0$:

$$T(x,y) = min(x,y)\cdot max(x,y,p) = \begin{cases} p\cdot\min(x,y), & \text{\textit{если}} \quad x,y \le p \\ xy, & \text{\textit{в противном случае}} \end{cases}.$$

6. Пример нечеткого моделирования с обобщенными параметрическими операциями

Пусть $z = f(x,y)$ – вещественная функции, определенная на $[0,1]\times[0,1]$ и заданная нечеткой моделью Сугено первого порядка с двумя входами и одним выходом. Каждая входная переменная в модели Сугено имеет 2 терма: *S (SMALL)* и *L (LARGE)*, заданных в виде нечетких множеств с трапециевидными функциями принадлежности (рис. 20).

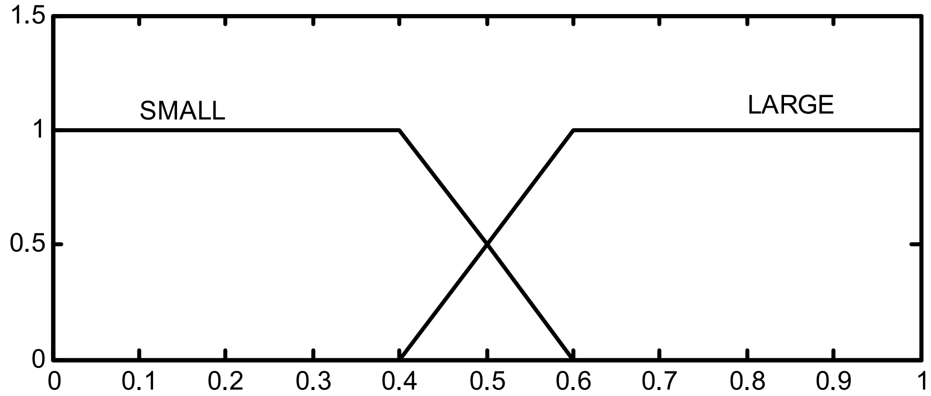


Рис. 20. Функции принадлежности нечетких множеств исходной нечеткой модели Сугено

Модель Сугено состоит из следующих 4 правил:

R_1: *IF x is S AND y is S THEN* $z= x+ 2y+ 3$,
R_2: *IF x is S AND y is L THEN* $z= 4x+10y+ 20$,
R_3: *IF x is L AND y is S THEN* $z= 3x+ 5y+ 15$,
R_4: *IF x is L AND y is L THEN* $z= 4x+ 8y+ 6$,

Для каждой пары вещественных значений x и y значение функции $z = f(x,y)$ вычисляется как средневзвешенное значений функций $z_i=a_ix + b_iy + c_i$, получаемых по правилам R_i:

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{4} w_i (a_i x + b_i y + c_i)}{\sum_{i=1}^{4} w_i}.$$

Здесь $a_ix + b_iy + c_i$ – выражение, стоящее в правой части правила R_i, w_i - сила срабатывания правила: $w_i = T(\mu_{Ai}(x),\mu_{Bi}(y))$, T - операция конъюнкции, представляющая связку *AND*, и $\mu_{Ai}(x)$, $\mu_{Bi}(y)$ суть значения принадлежности x и y соответствующим нечетким множествам A_i и B_i из левой части правил. В качестве операции конъюнкции *AND* применяется *t*-норма $T_M(u,v)= min(u,v)$. Поверхность функции $z = f(x,y)$, определенной этой моделью Сугено, показана на рис. 21.

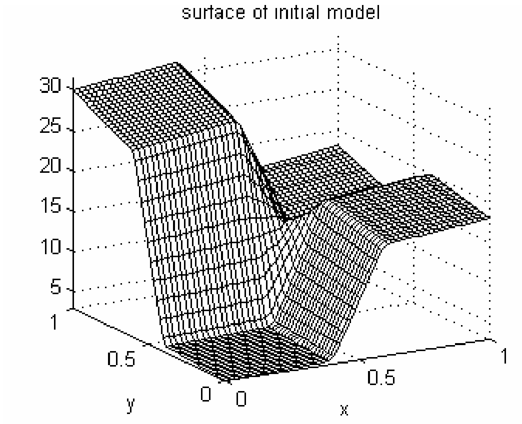


Рис. 21. Поверхность исходной модели

Эта функция аппроксимировалась такой же нечеткой моделью Сугено, в которой трапециевидные функции принадлежности были заменены треугольными функциями принадлежности (рис. 22), а операция *min* заменена параметрической операцией $T(u,v) = min(u,v) \cdot (u^p+v^q - u^p \cdot v^q)$.

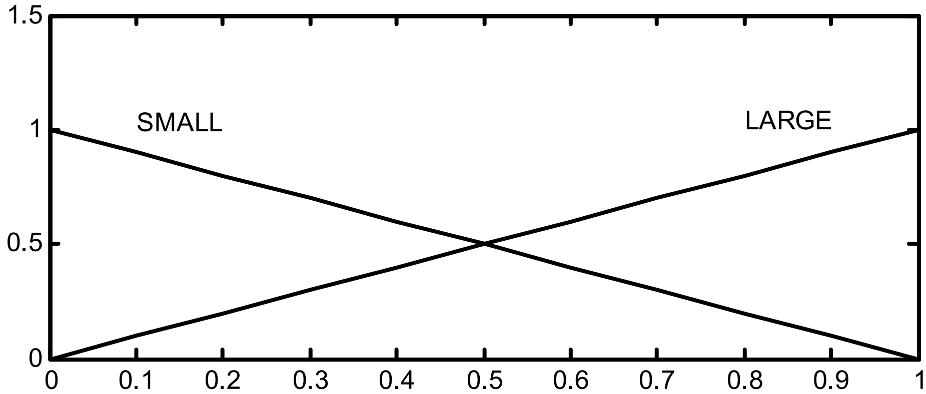


Рис. 22. Функции принадлежности нечетких множеств аппроксимирующей нечеткой модели Сугено

Оптимизация проводилась по четырем параметрам p_S, p_L, q_S, q_L, применявшимся для модификации значений принадлежности *x* к нечетким множествам *S* и *L,* и *y* к нечетким множествам *S* и *L* соответственно. Например, сила срабатывания второго правила вычислялась так:

$$w = T(\mu_S(x),\mu_L(y)) =$$
$$min(\mu_S(x),\mu_L(y)) \cdot (\mu_S(x)^{p_S} + \mu_L(y)^{q_L} - \mu_S(x)^{p_S} \cdot \mu_L(y)^{q_L}).$$

Значения оптимальных параметров p и q были получены как результат минимизации среднеквадратичной ошибки между графиком исходной функции и графиком аппроксимирующей нечеткой модели. По каждой шкале использовалась сетка из 50 точек, в результате 2500 точек исходного графика использовались для аппроксимации. Были получены следующие оптимальные значения параметров: p_S = 6.45, p_L = 6.45, q_S = 5.89, q_L = 5.89. Поверхность полученной аппроксимирующей нечеткой модели показана на рис. 23.

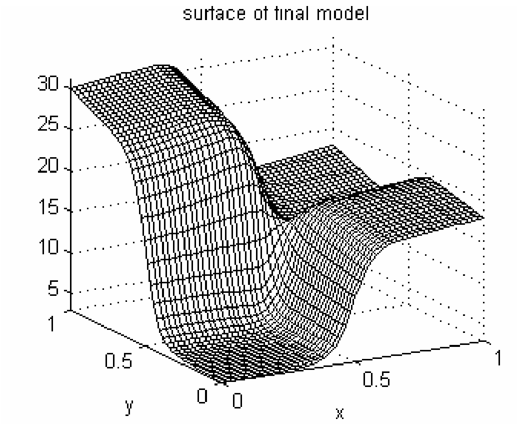


Рис. 23. Поверхность аппроксимирующей модели Сугено

Из сравнения рис. 21 и 23 видно, что полученная в результате оптимизации параметров операций нечеткая модель Сугено достаточно хорошо аппроксимирует исходную функцию. Оптимизация параметров операций нечетких моделей может использоваться при моделировании данных вместо или в дополнение к традиционно применяемой оптимизации параметров нечетких множеств, используемых в модели. В следующих разделах рассматриваются другие примеры оптимизации нечетких моделей по параметрам операций.

7. *G*-конъюнкции и *G*-дизъюнкции

Определение 7.1. Операциями G-конъюнкции T и G-дизъюнкции S называются функции T,S:$[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ такие, что для всех $x,y\in[0,1]$ выполняются следующие свойства:

$$T(0,0) = T(0,1) = T(1,0) = 0, \qquad T(1,1) = 1, \tag{24}$$
$$S(0,0) = 0, \qquad S(0,1) = S(1,0) = S(1,1) = 1, \tag{25}$$
$$T(x,y) \le T(u,v) \ \text{ и } \ S(x,y) \le S(u,v), \ \text{ если } \ x \le u,\ y \le v. \tag{26}$$

Нетрудно увидеть, что G-конъюнкция T и G-дизъюнкция S являются соответственно псевдоконъюнкцией и псевдодизъюнкцией, т.е. для всех $x,y\in[0,1]$ выполняются следующие свойства:

$$T(x,0) = T(0,x) = 0, \qquad S(x,1) = S(1,x) = 1. \tag{27}$$

Предложение 7.2. Пусть n - отрицание, T - некоторая G-конъюнкция и S – некоторая G-дизъюнкция, тогда соотношения

$$S_T(x,y) = n(T(n(x), n(y))), \qquad T_S(x,y) = n(S(n(x), n(y)))$$

определяют, соответственно, G-дизъюнкцию S_T и G-конъюнкцию T_S.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $S_T(0,0) = n(T(n(0),n(0))) =n(T(1,1)) = n(1) = 0$. $S_T(x,1) = n(T(n(x), n(1))) = n(T(n(x),0)) =n(0) = 1$. Аналогично получим $S_T(1,x) =1$. Монотонность S_T следует из монотонности T и N.

Доказательство для T_S проводится аналогично.

Если n инволютивное отрицание, то для любой G-конъюнкции T и дизъюнкции $S = S_T$ (для любой S и $T =T_S$) выполняются законы Де Моргана:

$$n(S(x,y)) = T(n(x), n(y)), \qquad n(T(x,y)) = S(n(x), n(y)).$$

Для новых операций ограничения (12) уже не выполняются.

Теорема 7.3. Пусть T есть G-конъюнкция, S есть G-дизъюнкция и f,g,h:$[0,1]\to[0,1]$ - неубывающие функции, такие что $f(0) = g(0) = h(0) = 0$, $f(1)= g(1) = h(1) = 1$, тогда следующие выражения

$$T_1(x,y) = f(T(g(x),h(y))),$$
$$S_1(x,y) = f(S(g(x),h(y))),$$

определяют G-конъюнкцию и G-дизъюнкцию соответственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $T(0,y) = f(T_1(g(0),h(y))) = f(T_1(0,h(y))) = f(0) = 0$. Аналогично, $T(y,0) = 0$. $T(1,1) = f(T_1(g(1),h(1))) = f(T_1(1,1)) = f(1) = 1$.

Монотонность T следует из монотонности T_1, f, g и h. Доказательство для S аналогично.

Очевидно, что вместо T и S можно использовать конъюнкции и дизъюнкции, рассмотренные выше. Результаты предыдущего раздела могут быть распространены на новые операции следующим образом.

Теорема 7.4. Пусть T_1, T_2 суть G-конъюнкции, S_1, S_2 суть псевдодизъюнкции, g_1, g_2:[0,1]→[0,1] суть неубывающие функции такие, что $g_1(1) = g_2(1) = 1$, тогда следующие выражения

$$T(x,y) = T_2(T_1(x,y), S_1(g_1(x),g_2(y))),$$
$$T(x,y) = T_2(T_1(x,y), g_1(S_1(x,y))),$$
$$T(x,y) = T_2(T_1(x,y), S_2(h(x),S_1(x,y))),$$

определяют G-конъюнкции:

Д о к а з а т е л ь с т в о. Монотонность T во всех выражениях следует из монотонности функций, используемых в правых частях выражений. Если x= 0 или y= 0, то $T_1(x,y) = 0$ и, следовательно, $T(x,y)$= 0. Если x= y= 1 то $T_1(1,1) = 1$, все S_1, g_1, g_2 равны 1, из (27) следует также, что S_2= 1 и, следовательно, во всех выражениях выполняется $T(x,y)$= $T_2(1,1)$= 1.

Новое определение конъюнкции и дизъюнкции дает возможность построения простейших параметрических классов этих операций, в частности, простейшими G-конъюнкциями являются следующие функции:

$$T(x,y) = min(x^p,y^q),$$
$$T(x,y) = x^p y^q,$$
$$T(x,y) = (xy)^p(x + y - xy)^q.$$

Поверхности этих функций для различных значений параметров p и q приведены на рис. 24 – 26.

С целью расширения класса функций, применяемых в нечетком моделировании, и, как следствие, увеличения гибкости нечетких моделей может быть использовано дальнейшее обобщение понятия конъюнкции. В частности, в простейшем параметрическом классе обобщенных нечетких конъюнкций $T(x,y) = x^p y^q$ вместо рассмотрения только положительных значений параметров p и q можно рассматривать любые вещественные значения. Так как параметры p и q могут сейчас быть и отрицательными, будем предполагать, что функции принадлежности, используемые в правилах нечеткой модели, имеют только положительные значения. Это свойство выполняется для функций принадлежности, представляемых колоколообразными и гауссовскими функциями принадлежности. Оно также выполняется для треугольных и трапециевидных функций принадлежности, которые принимают нулевые значения за пределами области определения входных переменных.

Для этой функции выполняется только одно свойство рассматриваемых выше операций конъюнкции: $T(1,1)=1$. Более того, функция $T(x,y)=x^p y^q$, где p,q - любые вещественные числа и $x,y\in(0,1]$, может принимать любые положительные значения, а не только значения из [0,1]. Для простоты будем называть эту функцию как *UG*-конъюнкцию. Конечно, эта функция вряд ли может с полным основанием рассматриваться как «естественное» обобщение операции конъюнкции, тем не менее, она может использоваться для обработки нечетких правил, рассматриваемых как функциональные модели специфического вида.

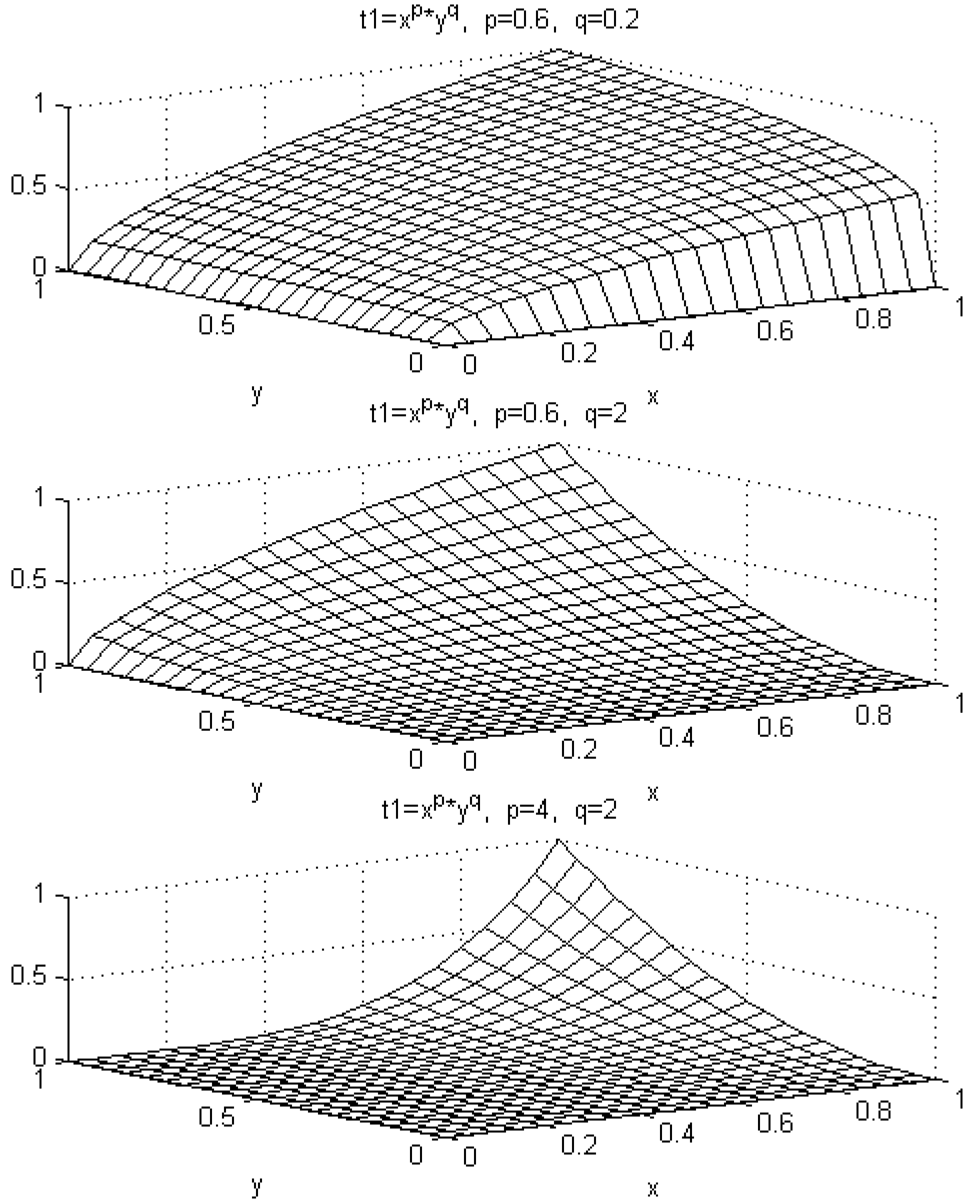


Рис. 24. Поверхность *G*-конъюнкции $T(x,y) = x^p y^q$ для различных значений параметров p и q

Следует заметить, что несколько «неправильных» функций использовались успешно в нечетком моделировании. Например, функция *sinc(x)=sin(x)/x* с отрицательными значениями рассматривалась как функция принадлежности в [90], а суммирование функций принадлежности с итоговым результатом большим, чем 1, применялось в стандартной аддитивной модели [82, 90].

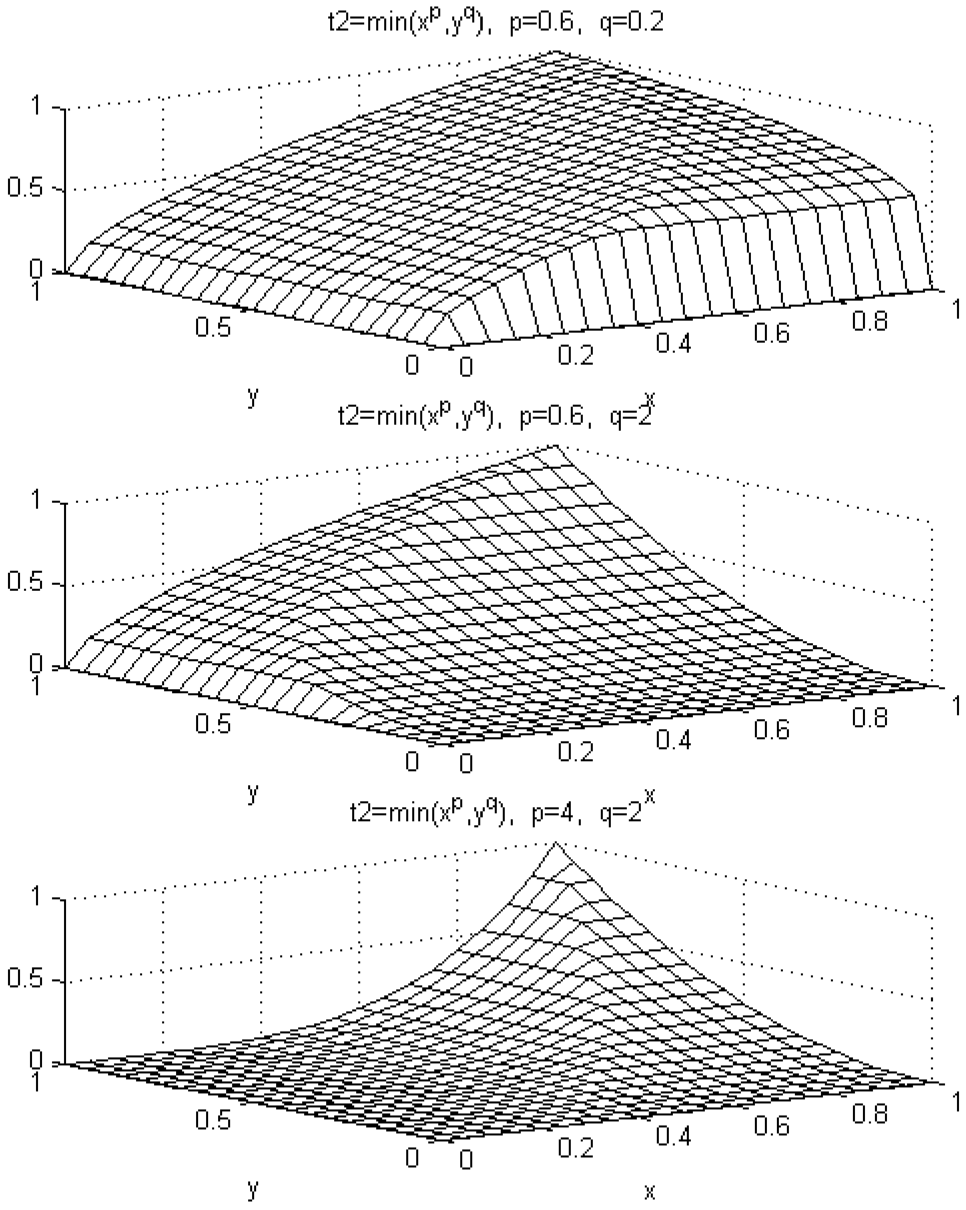


Рис. 25. Поверхность *G*-конъюнкции $T(x,y) = min(x^p, y^q)$ для различных значений параметров p и q

Простейшие параметрические конъюнкции могут рассматриваться также как модификаторы нечетких множеств. В этом случае операцию $T(x,y)= x^p y^q$ можно рассматривать как композицию операции конъюнкции $T_P(x,y)= xy$ и модификаторов $g_{i1}(x) = x^p$, $g_{i2}(x) = x^q$, модифицирующих значение функции принадлежности. Такие модификаторы функций принадлежности рассматривались в теории нечетких множеств.

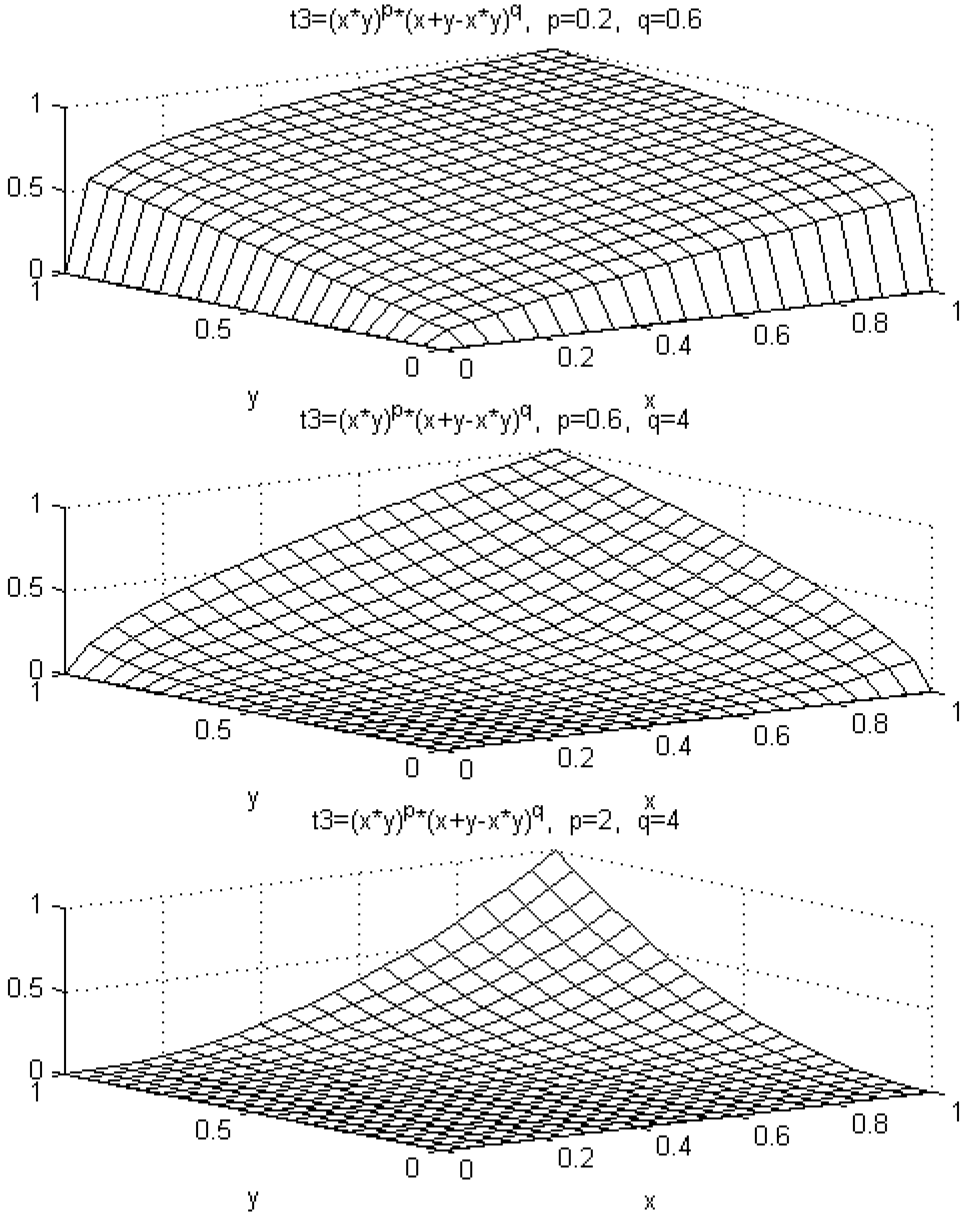


Рис. 26. Поверхность G-конъюнкции $T(x,y) = (xy)^p\ (x+y-xy)^q$
для различных значений параметров p и q

8. Пример аппроксимации функции нечеткими моделями

Рассматривается задача аппроксимации функции

$$f(x,y,z)=\left(1+\sqrt{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\sqrt{z^3}}\right)^2,$$

определенной на [1,6]×[1,6]×[1,6] нечеткой моделью Сугено с 8 правилами:

R_1: *If X is* A_1 *and Y is* B_1 *and Z is* C_1 *then* $u_1 = s_{11}x + s_{12}y + s_{13}z + t_1$,
R_2: *If X is* A_1 *and Y is* B_1 *and Z is* C_2 *then* $u_2 = s_{21}x + s_{22}y + s_{23}z + t_2$,
R_3: *If X is* A_1 *and Y is* B_2 *and Z is* C_1 *then* $u_3 = s_{31}x + s_{32}y + s_{33}z + t_3$,
…
R_8: *If X is* A_2 *and Y is* B_2 *and Z is* C_2 *then* $u_2 = s_{81}x + s_{82}y + s_{83}z + t_8$.

Каждой нечеткой входной переменной X, Y и Z соответствуют два нечетких терма $\{A_1, A_2\}$, $\{B_1, B_2\}$ и $\{C_1, C_2\}$, которые задаются колоколообразной функцией принадлежности:

$$A(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x-c}{a}\right)^{2b}}.$$

В качестве связки *and* используется G-конъюнкция $T(x,y) = x^p y^q$.

Исходные значения параметров колоколообразных функций принадлежности равны a=2.5, b=2.5, c=1 для A_1, B_1, C_1 и a=2.5, b=2.5, c=6 для A_2, B_2, C_2. Начальные значения параметров операций и правых частей правил равны 1. Сила срабатывания правил R_i вычисляется так:

$$w_i = A_i(x)^{p(i)} \cdot B_i(y)^{q(i)} \cdot C_i(z)^{r(i)}, \quad (i=1,\dots,8),$$

где каждая A_i, B_i, C_i принимает одно из двух возможных значений A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 соответственно.

Для настройки параметров использовались 216 обучающих данных и 125 контрольных данных, равномерно выбранных из входных диапазонов [1,6]×[1,6]×[1,6] и [1.5,5.5]×[1.5,5.5]×[1.5,5.5] соответственно. Применялся следующий показатель качества аппроксимации:

$$\text{APE}=\frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}\frac{T(i)-O(i)}{|T(i)|}\cdot 100\%,$$

где P число пар данных, а $T(i)$ и $O(i)$ это i-й желаемый и предсказанный выход, соответственно.

На рис. 27 приводятся кривые ошибок для нечетких моделей, полученных после оптимизации следующих параметров:

A) параметры функций принадлежности и правых частей правил (100 шагов итерационной процедуры, использовалась конъюнкция $T(x,y)=xy$);

C) параметры варианта A (30 шагов), а затем параметры операций $T(x,y)= x^p y^q$, $(p,q> 0)$ и правых частей правил (70 шагов);

D) параметры операций $T(x,y)= x^p y^q$, (p,q – любые вещественные числа) и правых частей правил (100 шагов);

E) вариант A (30 шагов), а затем вариант D (70 шагов).

Во всех случаях использовалась оптимизация параметров в течение 100 шагов по 10*m итераций, где m – общее число оптимизируемых в конкретном варианте параметров.

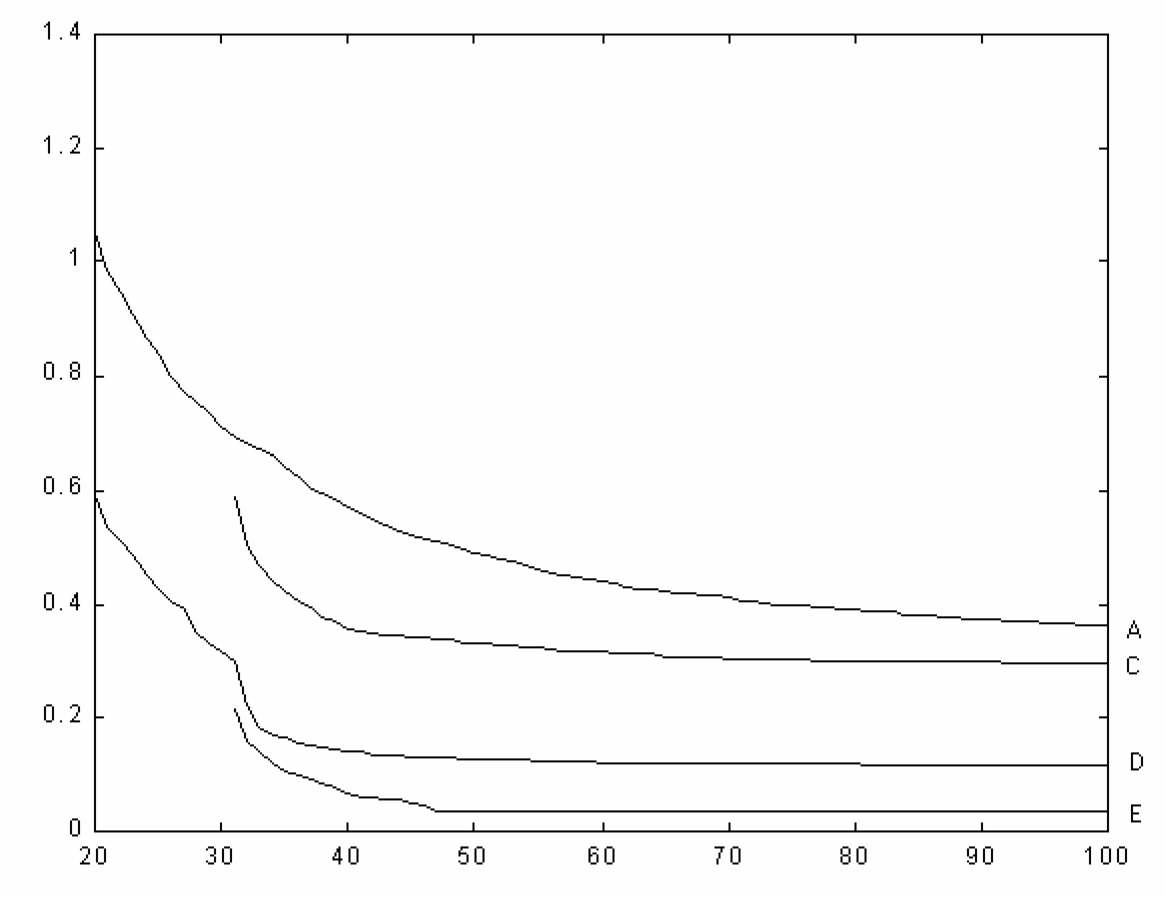


Рис. 27. Ошибки аппроксимации функции $f(x,y,z)= (1+ x^{0.5}+y^{-1}+ z^{-1.5})^2$ моделью Сугено, при оптимизации по различным группам параметров

Как видно из приведенных результатов, характеристики нечеткой модели в случае D), когда оптимизируются только операции *UG*-конъюнкции, даже лучше, чем характеристики нечеткой модели в случае C), когда использовалась оптимизация функций принадлежности вместе с операциями *G*-конъюнкции. Оптимизация *UG*-конъюнкций вместе с функциями принадлежности (случай E)) показывает лучшие результаты на обучающих данных, чем результаты, полученные адаптивной нейро-нечеткой системой вывода ANFIS [82]. Результаты, полученные ANFIS, основаны, как и в случае A), только на оптимизации колоколообразных функций принадлежности. Мы здесь не обсуждаем применяемые методы оптимизации, поскольку все из них дают некоторый локальный оптимум, определяемый не только применяемым методом, но и заданным показателем качества аппроксимации. В общем случае, оптимизация функций принадлежности, по-видимому, должна давать меньшую ошибку аппроксимации, так как основана на сдвиге функции принадлежности и ее модификации, в то время как оптимизация по параметрам операций состоит в модификации значений принадлежности и в их определенном сочетании. В то же время, как говорилось в начале главы, если нечеткие множества, используемые в модели, отражают экспертные знания о моделируемом объекте, то оптимизация только по параметрам операций позволяет сохранять неизменными эти знания.

9. Идентификация нечетких моделей динамических систем

Для идентификации систем используются как нечеткие модели Мамдани так и нечеткие модели Сугено. Традиционно применяется оптимизация этих моделей по параметрам нечетких множеств. Рассмотрим пример оптимизации нечетких моделей Сугено по параметрам операций на задаче идентификации нечеткой модели динамической системы. В качестве примера была взята задача идентификации динамической системы с нелинейной подсистемой, задаваемой разностным уравнением, используемая для тестирования различных подходов к идентификации нечетких систем. Моделируемая система задается следующим разностным уравнением:

$$y(k+1)=0.3y(k)+0.6y(k-1)+f(u(k)),$$

где $y(k)$ - выход, а $u(k)$ - вход системы в момент времени k. Неизвестная функция f описывается следующим уравнением:

$$f(u) = 0.6sin(\pi u)+0.3sin(3\pi u)+0.1sin(5\pi u),$$

где входная переменная u принимает значения в интервале [-1,1].

Ставилась задача моделирования этой неизвестной функции нечеткой моделью Сугено в он-лайн режиме по мере поступления информации о значениях этой функции с изменением момена времени k. Таким образом, модель системы задавалась разностным уравнением

$$Y(k+1)=0.3Y(k)+0.6Y(k-1)+F(u(k)),$$

где F – функция, определяемая нечеткой моделью Сугено. Эта модель состояла из семи правил вида:

$$R_i\text{: } If\ U\ is\ A_i\ then\ F_i = r_i u + s_i, \qquad (i=1,2,\ldots,7),$$

где A_i это нечеткие множества, определенные на множестве значений входной переменной u, U – нечеткая переменная со значениями A_i , r_i и s_i - параметры заключений. В качестве функций принадлежности нечетких множеств были выбраны обобщенные колоколообразные функции принадлежности, задаваемые уравнениями

$$\mu_{A_i}(u) = \frac{1}{1+\left|\frac{u-c_i}{a}\right|^{2b}},$$

так, чтобы они равномерно покрывали область определения входной переменной *u*. Графики функций принадлежности нечетких множеств, применявшихся в нечеткой модели, приведены на рис. 28. Эти функции принадлежности определялись следующими значениями параметров: a=0.1667, b =2 для всех функций принадлежности; параметры c_i принимали значения: -1, -0.67, -0.33, 0, 0.33, 0.67, 1 для i = 1,…,7 соответственно.

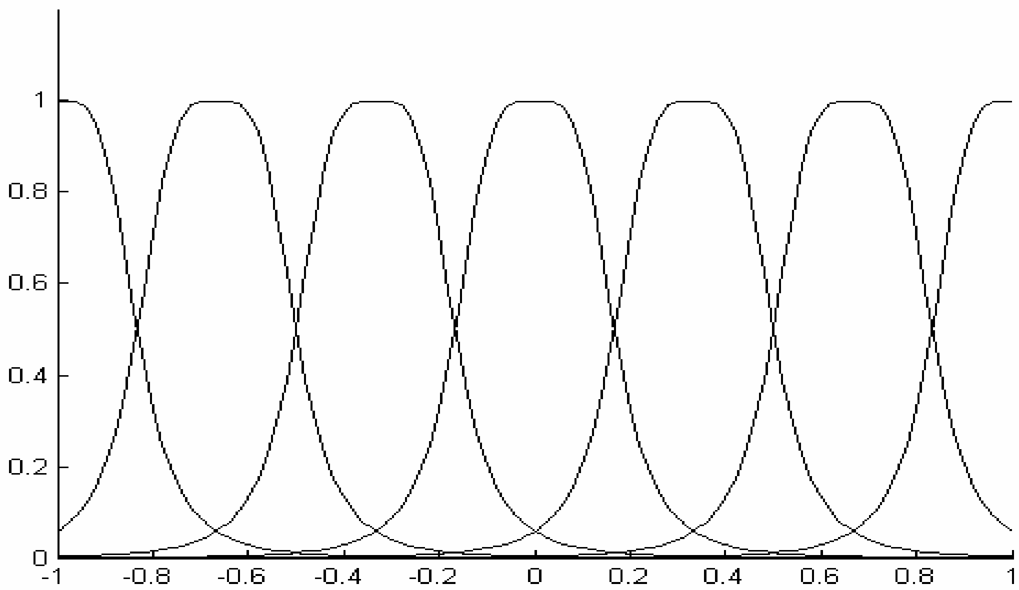


Рис. 28. Функции принадлежности нечетких множеств в задаче идентификации динамической системы

В процессе логического вывода применялись операции импликации, использующие следующие параметрические обобщенные операции конъюнкции: $T(w,F)=w^pF^q$, где $w=\mu_{A_i}(u)$ и $F=F_i$ (i=1,…,7). Значение, получаемое на выходе нечеткой модели, вычисляется как среднее взвешенное значений, полученных по правилам:

$$F=\frac{\sum_{i=1}^{7} w_i^{p_i} F_i^{q_i}}{\sum_{i=1}^{7} w_i^{p_i}}.$$

Суммарное число оптимизируемых параметров модели p_i, q_i, r_i и s_i, использовавшихся при идентификации системы, равно 28.

В процессе обучения в течение k=250 моментов времени на вход системы и модели подавался следующий сигнал:

$$u(k)=sin(2\pi k/250).$$

Начальные 20 значений $u(k)$ использовались для определения стартовых значений параметров нечеткой модели, после чего на каждом шаге применялась адаптация параметров модели до окончания процесса обучения на шаге k=250. Результаты моделирования приведены на рис. 29, из которого видно, что графики функций, описывающих поведение системы и модели практически неразличимы, причем совпадение графиков наблюдается и после того, как по окончании адаптации нечеткой модели закон изменения входного воздействия $u(k)$ был изменен на шаге k= 500 на следующий:

$$u(k)=0.5sin(2\pi k/250)+0.5sin(2\pi k/25).$$

В табл. 1 приведено сравнение числа параметров, используемых в предлагаемом подходе к оптимизации нечетких моделей по параметрам операций, с числом параметров, используемых в других подходах, описанных в литературе. Как видно из таблицы, предлагаемый подход использует наименьшее число параметров при удовлетворительном уровне решения задачи идентификации системы.

Табл. 1. Число параметров, используемых разными подходами в примере идентификации динамической системы

Подход	Число параметров
Тьюнинг операций в модели Сугено	28
Тьюнинг функций принадлежности в модели Сугено [82]	35
Тьюнинг функций принадлежности в модели Мамдани [117]	30
Многослойный перцептрон [99]	261

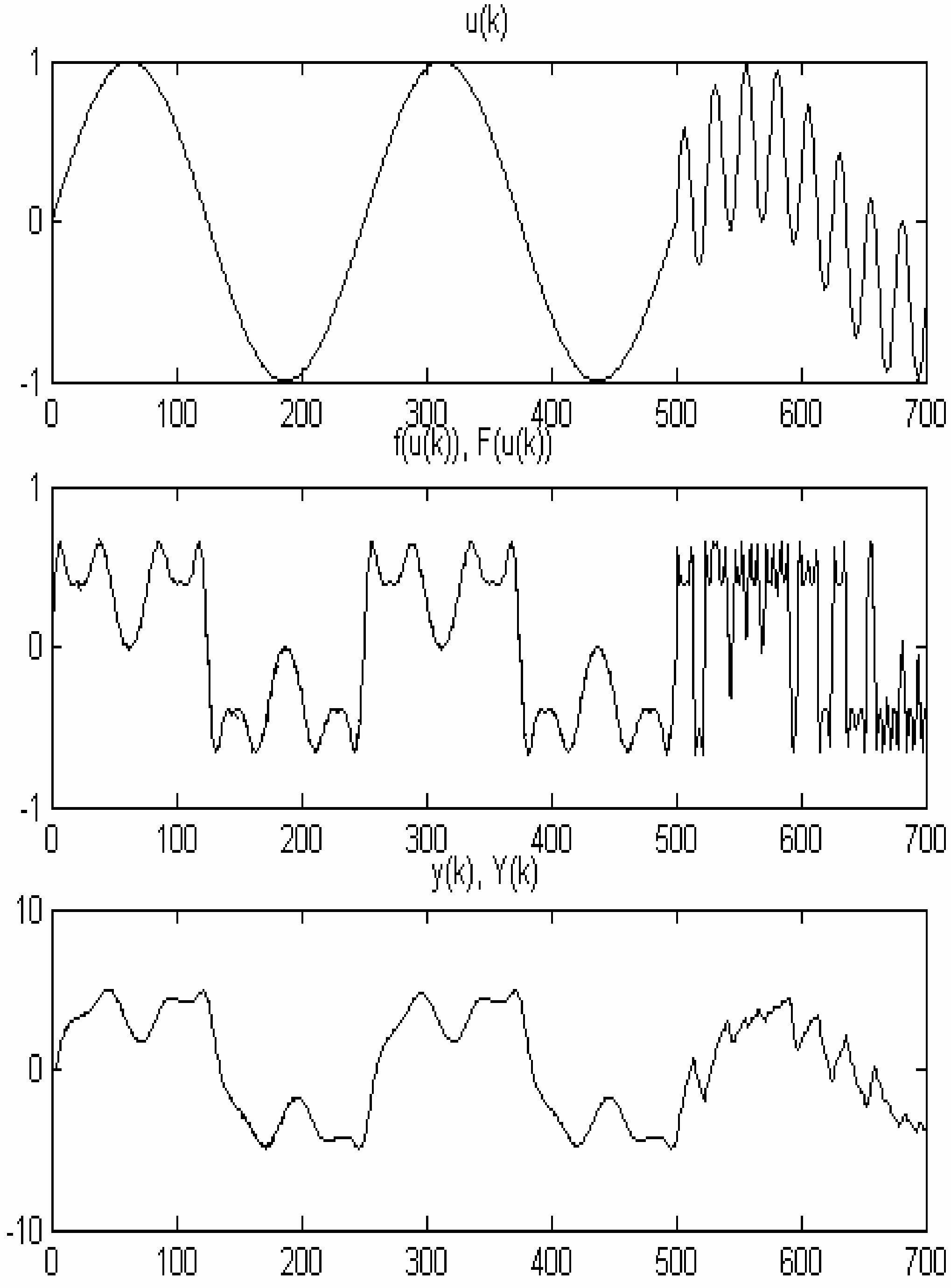


Рис. 29. Графики изменения входа *u(k)*, “неизвестной” функции *f(u(k))*, нечеткой модели *F(u(k))*, выхода системы *y(k)* и выхода модели *Y(k)* (почти совпадают)

10. Представление и оптимизация нечетких моделей Сугено нейронными сетями

Нечеткие системы могут быть представлены многослойными нейронными сетями. Это представление может быть использовано в нескольких целях. Во-первых, такое представление нечетких систем позволяет использовать для оптимизации нечетких систем методы оптимизации нейронных сетей, в частности, метод обратного распространениия волны. Во-вторых, подобное представление может использоваться для аппаратной реализации нечетких систем с помощью имеющихся технологий аппаратной реализации нейронных сетей.

Нечеткие системы, представленные с помощью нейронных сетей, обычно называют нейро-нечеткими системами. В настоящее время разработаны методологии представления и оптимизации нейро-нечетких систем по параметрам функций принадлежности. Здесь приводятся результаты проведенного моделирования по представлению и оптимизации нейро-нечетких систем Сугено по параметрам операций на задаче аппроксимации функции от двух переменных.

Рассматривались две архитектуры нейро-нечеткой системы. В первой, типа ANFIS, структура нейронной сети наглядно отображает структуру нечеткой системы, однако, оптимизируемые параметры находятся не на дугах сети, как это имеет место в стандартных многослойных нейроных сетях, а в узлах сети. В другой архитектуре нейро-нечеткой системы оптимизируемые параметры (в том числе и параметры операций) находятся на дугах сети, что позволяет применить стандартные методы оптимизации нейронных сетей для оптимизации нейро-нечеткой системы по параметрам операций. Далее на примере аппроксимации функции от двух переменных приводятся структуры нейронных сетей первого и второго типа.

Рассматривается пример аппроксимации функции $f = sinc(x,y) = sin(x)sin(y)/(xy)$ нечеткой моделью Сугено, состоящей из правил R_i (i=1,…,n) со следующей структурой:

$$R_i\text{: } If\ X\ is\ A_i\ and\ Y\ is\ B_i\ then\ f_i = s_i x + t_i y + r_i,$$

Этот пример расматривался также в [82], где эта функция аппроксимировалась нейро-нечеткой системой ANFIS с 16 правилами по параметрам четырех функций принадлежности по каждой переменной и параметрам правых частей правил с операций конъюнкции *and*, определяемой как $T(x,y) = xy$.

В рассматриваемой ниже первом подходе использовалась модель Сугено с тремя фиксированными функциями принадлежности по каждой переменной и с параметрической операцией конъюнкции: $T(x,y) = x^p y^q$, *(p,q*> 0). Суммарное число 45 параметров модели состояло из 18 параметров операций и 27 параметров правых частей 9 правил. На рис. 30 приведен для простоты аналог этой модели для 4 правил с двумя нечеткими множествами по каждой переменной.

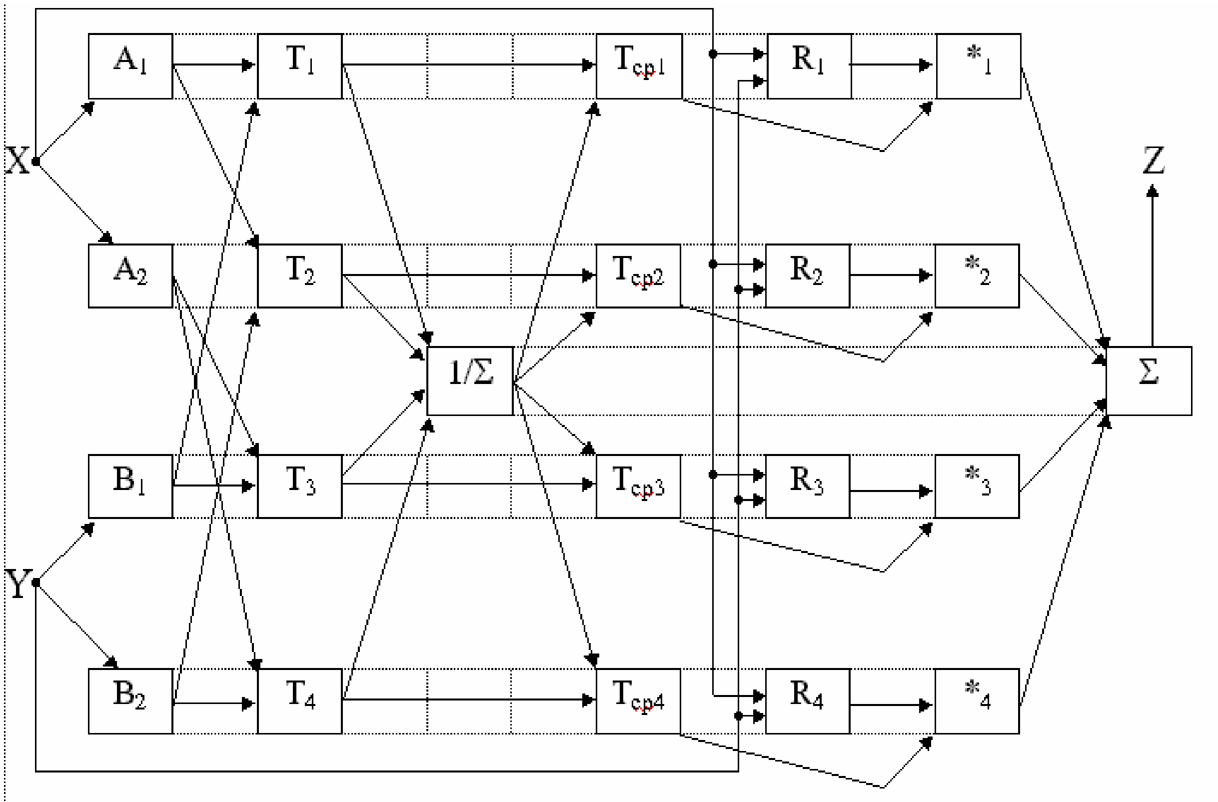


Рис. 30. Архитектура нейро-нечеткой системы типа ANFIS с 4 правилами

Приведем краткое описание слоев соответствующей нейро-нечеткой модели.

Слой 1. Входами являются вещественные значения x и y. Выходами являются значения принадлежности $A_i(x)$, $B_j(y)$, в качестве которых были выбраны колоколообразные функции принадлежности.

Слой 2. Выходами являются величины срабатывания w_i посылок правил: $w_i=A_i(x)^{pi}B_i(y)^{qi}$.

Слой 3. Выходами являются нормализованные величины срабатывания правил: $w_i^*=w_i/\sum_i(w_i)$.

Слой 4. Выходами являются взвешенные заключения правил: $f_iw_i^* = (s_ix+t_iy+r_i)w_i^*$.

Слой 5. Выходом является значение функции, определяемой моделью: $f=\sum_i(f_iw_i^*)$.

Слои 1, 3, 5 имеют фиксированные узлы, слои 2 и 4 имеют адаптивные узлы с параметрами операций p_i, q_i и параметрами правых частей правил s_i, t_i, r_i соответственно. В общем случае узлы слоя 1 также могут рассматриваться как адаптивные с параметрами функций принадлежности. В применяемой модели эти функции принадлежности были зафиксированы и равномерно распределены по области значений входных переменных [-10,10].

При оптимизации этой нейро-нечеткой системы применялся метод наименьших квадратов для идентификации параметров правых частей правил и метод обратного распространения ошибки для идентификации параметров операций. Среднеквадратичная ошибка аппроксимации значений функции *sinc*, вычисленных в 400 равномерно распределенных точках диапазона входных значений [-10,10]×[-10,10], составила 0.0248 после 300 эпох.

Как видно из рис. 30, нейронная сеть наглядно отображает структуру нечеткой системы, однако, применение стандартных методов оптимизации нейронных сетей к полученной сети затруднительно, поскольку оптимизируемые параметры не ассоциированы непосредственно с дугами сети. Кроме этого, условие, чтобы все выходы одного слоя были связаны со всеми входами другого слоя, требуемое в стандартной архитектуре многослойных нейронных сетей, в предложенной модели не выполняется. По этой причине была предложена архитектура нейро-нечеткой системы, к которой применимы стандартные методы оптимизации нейронных сетей. Структура этой системы для упрощенного аналога модели Сугено с 2 нечеткими множествами по каждой переменной и 4 правилами представлена на рис. 31.

Приведем описание этой сети.

<u>Слои 1-6.</u> Входами являются вещественные значения x и y. Выходами являются функции принадлежности $A_i(x)$, $B_j(y)$ обобщенных гауссовских функций принадлежности.

<u>Слои 7-15.</u> Выходами являются значения конъюнкций: $w_i=A_i(x)^{pi}B_i(y)^{qi}$.

<u>Слой 16.</u> Выходом является величина $w^*=1/\sum_i(w_i)$.

<u>Слои 17-25.</u> Выходами являются нормализованные значения срабатывания правил: $w_i^*=w_iw^*$.

<u>Слои 26-34.</u> Выходами являются заключения правил: $f_i = s_ix+t_iy+r_i$.

<u>Слои 35-43.</u> Выходами являются взвешенные заключения правил: $f_iw_i^*$.

<u>Слой 44.</u> Выходом является значение функции, определяемое моделью: $f=\sum_i(f_iw_i^*)$.

В этой нейронной сети обучались выходы слоев 7 - 15 и 26 - 34. Выходы остальных слоев использовались только для вычисления выхода системы.

Если в первой нейронной сети свойство “все узлы некоторого слоя связаны со всеми узлами некоторого другого слоя” не выполняется, то для второй сети это условие выполнено, что дает возможность применять для обучения нейронной сети стандартное программное обеспечение. В то же время количество слоев нейронной сети значительно увеличилось. Средняя квадратичная ошибка аппроксимации значений функции *sinc* по выбранным 400 точкам методом Левенберга-Маккарта составила 0.0283 после 49 эпох обучения.

В рамках предложенных архитектур нейро-нечетких систем сохраняется возможность также и оптимизации по параметрам нечетких множеств при параметрическом их задании.

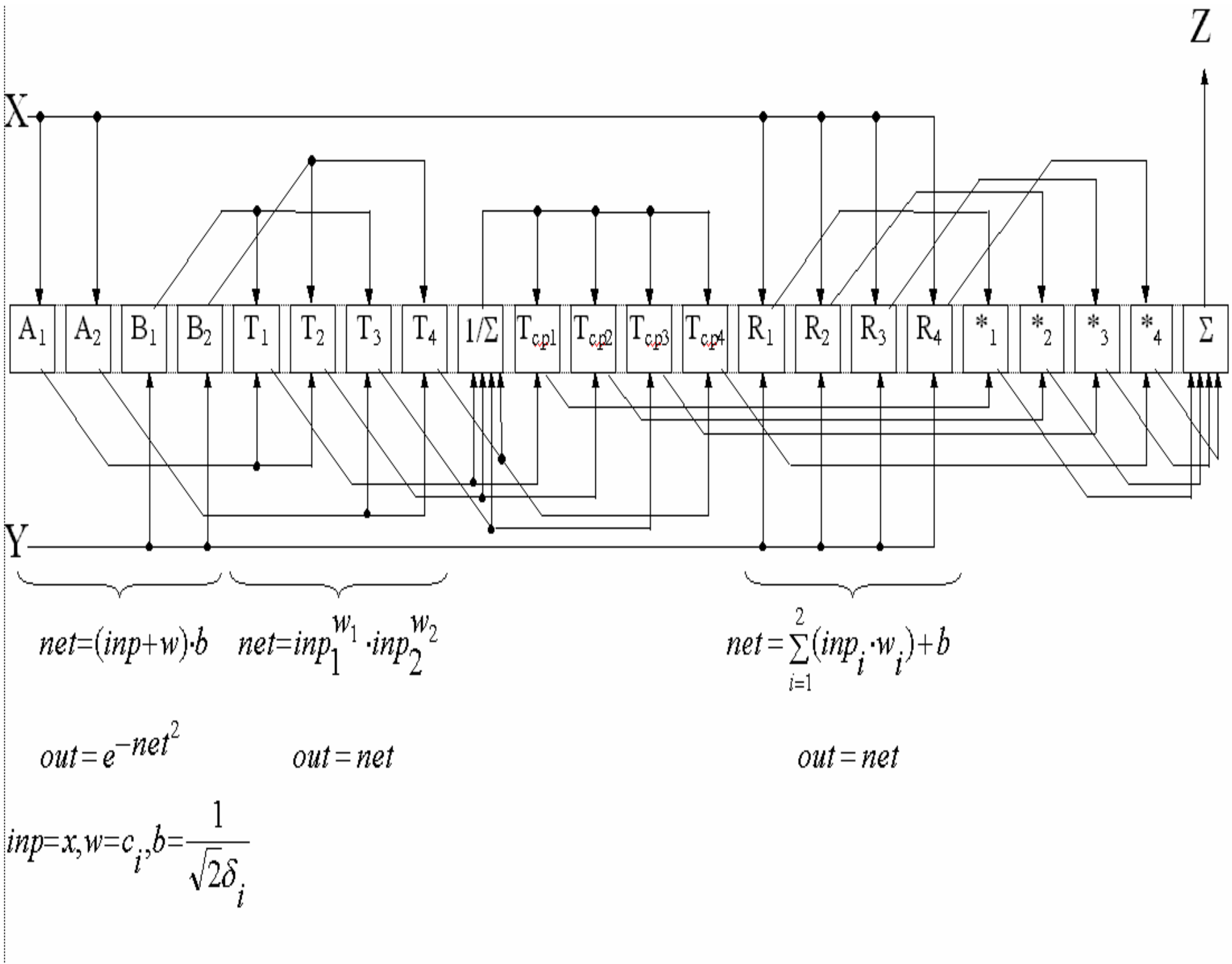


Рис. 31. Линеаризованная нейро-нечеткая система с 4 правилами

Библиографические комментарии к главе 3

Общий взгляд на нечеткую логику с точки зрения нечеткой математики, технических приложений и моделирования человеческих рассуждений приводится в [9]. Строго монотонные операции конъюнкции и дизъюнкции на порядковых шкалах и их приложения в экспертных системах обсуждаются в [7, 8, 27, 55]. Операции на конечных шкалах рассматриваются также в [73, 80, 95, 109]. Настраиваемые на эксперта нечеткие логики исследуются в [2, 77]. Дистрибутивность нечетких связок рассматривается в [38, 60, 94, 116]. Преобразования логических форм обсуждается в [112]. t-нормы и t-конормы изучались в теории вероятностных метрических пространств [98, 106] и в настоящее время рассматриваются как основные операции нечеткой логики [38, 73, 75, 79, 87, 96, 103, 116, 119]. Операции, обобщающие t-нормы и t-конормы, рассматриваются в [94, 120, 121]. Свойства ассоциативных функций изучаются в [39]. Применение нечетких моделей Сугено и Мамдани в управлении и идентификации систем обсуждается в [81, 82, 90, 100, 107, 108, 117]. Аппаратная реализация нечетких операций обсуждается в [122]. Влияние нечетких операций на поведение нечетких систем и вопросы оптимизации нечетких моделей по параметрам операций обсуждались в [61, 85, 86, 100, 112]. Задача разработки простых параметрических классов конъюнкций и дизъюнкций с целью их применения в задачах оптимизации нечетких моделей по параметрам операций впервые ставилась в [47, 48].

Разделы 2 и 3 основаны на работах [75, 87].

Разделы 4 - 6 основаны на работах [47, 48].

Раздел 7 основан на работах [44, 49, 51].

Обобщения операций конъюнкции и дизъюнкции в различных аксиоматиках под названием t-полунорм и t-полуконорм, слабых t-норм и др. рассматривались также в работах [28, 57, 62, 71 – 75, 88]. Аксиоматическое обоснование параметрической конъюнкции $(xy)^k$ и ее применение для построения нечеткого регулятора рассматривается в [57].

Свойства неассоциативных параметрических конъюнкций и дизъюнкций и их применение в задачах оптимизации нечетких моделей Мамдани и Сугено обсуждаются в работах [11, 13, 46, 50]. Часть результатов этих работ легла в основу разделов 8 и 9. В этих разделах приводятся примеры, которые обсуждались во многих работах и использовались для сравнения различных подходов к моделированию [82, 99, 117 и др.].

Раздел 10 основан на работах [34, 52, 58].

Вопросы применения нейронных сетей и нейро-нечетких моделей в задачах моделирования систем обсуждаются в [61, 81, 82, 85, 90, 91, 99, 117].