ГЛАВА 2. ОПЕРАЦИИ ОТРИЦАНИЯ

1. Операции отрицания на линейно упорядоченном множестве

1.1. Основные понятия

Пусть L – множество значений принадлежности (правдоподобности, уверенности, возможности, истинности), упорядоченное отношением линейного порядка $\leq$, с наименьшим 0 и наибольшим I элементами. Будем предполагать, если не оговорено противное, что |L| >2. Таким образом, кроме условий рефлексивности, антисимметричности и транзитивности для всех $x,y \in L$ выполняется: $x \leq y$ или $y \leq x$ (линейность) и $0 \leq x, y \leq I$. Отношение $\leq$ определяет на L операции $\wedge = min$ и $\vee = max$ обычным образом: $x \wedge y = x$ и $x \vee y = y$, если $x \leq y$; $x \wedge y = y$ и $x \vee y = x$, если $y \leq x$. $x < y$ означает, что $x \leq y$ и $x \neq y$.

Примером L может служить интервал вещественных чисел [0,1], шкала лингвистических оценок правдоподобности L = {неправдоподобно, мало правдоподобно, средняя правдоподобность, большая правдоподобность, наверняка}, шкала балльных оценок $L = \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ и др.

Определение 1.1. Операцией отрицания на L называется функция $n: L \to L$, удовлетворяющая на L условиям:

$$n(0) = I, \qquad n(I) = 0, \tag{1}$$

$$n(y) \leq n(x), \qquad \text{если } x \leq y. \tag{2}$$

В зависимости от выполнения на L дополнительных условий рассматривают следующие типы отрицаний:

$n(y) < n(x)$, если $x < y$	(строгое отрицание),
если $x < y$ и $n(y) = n(x)$, то $n(x), n(y) \in \{0, I\}$	(квазистрогое отрицание),
$n(n(x)) = x$	(инволюция),
$n(n(x)) \leq x$	(обычное отрицание),
$x \leq n(n(x))$	(слабое отрицание).

Слабое отрицание называется также интуиционистским отрицанием. Элемент x из L будет называться инволютивным элементом, если $n(n(x)) = x$, в противном случае он будет называться неинволютивным. Отрицание будет называться неинволютивным, если L содержит неинволютивные по этому отрицанию элементы.

Нетрудно увидеть, что если n обычное или слабое отрицание, то n удовлетворяет на L соотношению:

$$n(n(n(x))) = n(x).$$

Элемент $s \in L$, удовлетворяющий условию

$$n(s) = s, \qquad (3)$$

называется фиксированной точкой. Этот элемент будет центральным элементом (фокусом) L. Очевидно, что если фиксированная точка существует, то она единственна и $0 < s < I$.

Пусть $T,S{:}L \times L \to L$ – операции, удовлетворяющие на L условиям:

$$T(x,y) = T(y,x), \qquad S(x,y) = S(y,x), \qquad (4)$$
$$T(x,y) \le x, \qquad x \le S(x,y). \qquad (5)$$

В качестве операций T и S могут рассматриваться операции конъюнкции и дизъюнкции, соответственно, в частности операции $\wedge = min$ и $\vee = max$.

Предложение 1.2. Операция отрицания n удовлетворяет на L неравенству Клини:

$$T(x,n(x)) \le S(y,n(y)). \qquad (6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $x \le y$, то $T(x,n(x)) \le x \le y \le S(y,n(y))$. Если $y \le x$, то $n(x) \le n(y)$ и $T(x,n(x)) \le n(x) \le n(y) \le S(y,n(y))$.

Предложение 1.3. Если n – инволюция, то один из законов Де Моргана

$$n(S(x,y)) = T(n(x),n(y)), \qquad (7)$$
$$n(T(x,y)) = S(n(x),n(y)). \qquad (8)$$

выполняется на L тогда и только тогда, когда выполняется второй закон. Если $T = min$ и $S = max$, то законы Де Моргана выполняются для любого отрицания n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть n – инволюция. Подставив в одно из соотношений (7), (8) вместо x и y соответственно $n(x)$ и $n(y)$ и взяв отрицание от обеих частей полученного равенства из выполнения $n(n(x)) = x$ на L получим второе соотношение. Если $T = min$ и $S = max$, то выполнение законов Де Моргана следует из линейной упорядоченности L. Пусть, например, $x \le y$, тогда $n(y) \le n(x)$ и обе части (7) совпадают: $n(S(x,y)) = n(y)$ и $T(n(x),n(y)) = n(y)$. Аналогично совпадение получим для (8).

1.2. Сжимающие и разжимающие отрицания

Теорема 1.4. Для любого отрицания n и для любого $x\in L$ выполняется по крайней мере одно из соотношений

$$x \wedge n(x) \le n(n(x)) \le x \vee n(x)\,, \tag{9}$$

$$n(x) \wedge n(n(x)) \le x \le n(x) \vee n(n(x)). \tag{10}$$

Оба соотношения выполняются одновременно тогда и только тогда, когда x – инволютивный элемент.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \le n(x)$, тогда из (2) получим $n(n(x)) \le n(x)$, откуда следует либо $x \le n(n(x)) \le n(x)$, либо $n(n(x)) \le x \le n(x)$, что приводит к (9) и (10), соответственно. Двойственно, $n(x) \le x$ также приводит к (9) и (10).

Если x – инволютивно, то (9) и (10) очевидно совпадают. Пусть (9) и (10) выполняются одновременно. Тогда из $x \le n(x)$ следует $n(n(x)) \le n(x)$, и из (9), (10) получаем $x \le n(n(x))$ и $n(n(x)) \le x$, откуда следует инволютивность x. Двойственно, из $n(x) \le x$ также следует $n(n(x)) = x$.

Определение 1.5. Отрицание n называется сжимающим (разжимающим) в точке $x\in L$, если выполняется неравенство (9) (соответственно (10)), и сжимающим (разжимающим) (на L), если соответствующее неравенство выполняется на L.

Следствие 1.6. Отрицание n является инволюцией тогда и только тогда, когда оно сжимающее и разжимающее одновременно.

Классическим примером инволютивного отрицания на [0,1] является отрицание $n(x) = 1 - x$ с фиксированной точкой s =0.5.

Обозначим $n^0(x)= x$, $n^1(x)= n(x),\ldots, n^{k+1}(x)= n\left(n^k(x)\right)$ для $k = 1, 2 ,\ldots$

Структура множества элементов $n^k(x)$, (k= 0,1,…), порождаемых некоторым элементом x из L с помощью отрицания n на L, характеризуется следующим образом.

Предложение 1.7. Отрицание n является сжимающим в x тогда и только тогда, когда для всех целых $0\le k\le j$ выполняется:

$$n^{2k}(x) \le n^{2j}(x) \le n^{2j+1}(x) \le n^{2k+1}(x), \text{ если } x \le n(x), \tag{11}$$

$$n^{2k+1}(x) \le n^{2j+1}(x) \le n^{2j}(x) \le n^{2k}(x), \text{ если } n(x) < x\,. \tag{12}$$

Отрицание n является разжимающим в x тогда и только тогда, когда (11), (12) выполняются для всех целых $0\le j \le k$.

Доказательство следует непосредственно из теоремы 1.4 и (2).

Следствие 1.8. Если для некоторого $k \ge 0$ элемент $n^k(x)$ является фиксированной точкой отрицания n, то n является сжимающим в x.

Заметим, что разжимающее отрицание также может иметь фиксированную точку.

Предложение 1.9. Отрицание n является сжимающим тогда и только тогда, когда на L из

$$x \wedge n(x) \leq y \leq x \vee n(x) \tag{13}$$

следует:

$$x \wedge n(x) \leq n(y) \leq x \vee n(x), \tag{14}$$

и n является разжимающим тогда и только тогда, когда из (13) следует:

$$n(x) \wedge n(n(x)) \leq y \leq n(x) \vee n(n(x)). \tag{15}$$

Доказательство. Если из (13) следует (14), то из выполнения (13) для $y = n(x)$ следует (9), т.е. n – сжимающее отрицание. Пусть n – сжимающее отрицание и (13) выполнено для некоторых x и y. Тогда выполняется $x \leq y \leq n(x)$ или $n(x) \leq y \leq x$, откуда, применяя (2), получим соответственно $n(n(x)) \leq n(y) \leq n(x)$ или $n(x) \leq n(y) \leq n(n(x))$ и из выполнения (9) для n получим соответственно $x \leq n(n(x)) \leq n(y) \leq n(x)$ или $n(x) \leq n(y) \leq n(n(x)) \leq x$, откуда следует (14).

Аналогично доказывается вторая часть предложения для разжимающего отрицания.

Следствие 1.10. Из выполнения (13) следует для всех $k > 0$:

$x \wedge n(x) \leq n^k(y) \leq x \vee n(x)$, если n сжимающее на L и
$n^k(x) \wedge n^{k+1}(x) \leq y \leq n^k(x) \vee n^{k+1}(x)$, если n разжимающее на L.

Таким образом, если y находится "между" x и $n(x)$, и n - сжимающее отрицание, то и все элементы $n^k(y)$, порождаемые элементом y, также будут находиться "между" x и $n(x)$; а если x и $n(x)$ находятся "по разные стороны" от y, и n - разжимающее отрицание, то и все элементы $n^k(x)$ и $n^{k+1}(x)$, порождаемые из x, также будут "по разные стороны" от y.

Определение 1.11. Пусть n – отрицание на L и $x \in L$. Множество $G(x) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{ n^k(x) \right\}$ называется множеством элементов, порождаемым элементом x. Мощность этого множества $R = |G(x)|$ будет называться рангом элемента x. Если $G(x)$ содержит бесконечное число элементов, то будем писать $R(x) = \infty$. Ранг отрицания n определяется как $R(n) = \sup_{x \in L} R(x)$.

Отметим следующие очевидные свойства отрицаний.

Следствие 1.12.

1) $R(x) = 1$ тогда и только тогда, когда x – фиксированная точка отрицания n, т.е. $x = s$.

2) $R(n) = 2$, если n – инволюция.

3) $R(n) \leq 3$, если n – обычное или слабое отрицание.

Далее, если для n существует обратное отрицание n^{-1}, то для введенных выше понятий будем использовать соответственно обозначения $n^{-k}(x)$, $G^{-1}(x)$, $R^{-1}(x)$ и $R^{-1}(n)$.

Предложение 1.13. Пусть n - отрицание на L и $x \in L$. Если $R(x)= k$, где $1< k < \infty$, то $G(x) =\{x, n(x),..., n^{k-1}(x)\}$, и либо выполняется $n^{j}(x) = n^{k-1}(x)$ для всех $j \geq k$ и n – сжимающее в x с фиксированной точкой $s =n^{k-1}(x)$, либо $n^{k+2j}(x)=n^{k-2}(x)$ и $n^{k+2j+1}(x)=n^{k-1}(x)$ для всех $j \geq 0$. Если $R(x) = \infty$, то $n^{k}(x) \neq n^{j}(x)$ для всех $k \neq j$, $k, j \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из $R(x)= k$ следует $n^{j}(x) \neq n^{i}(x)$ для всех $i< j<k$ и $G(x) =\{x, n(x),..., n^{k-1}(x)\}$, так как в противном случае $n^{j}(x)=n^{i}(x)$, $n^{j+1}(x)= n^{i+1}(x),..., n^{2j-i}(x)= n^{j}(x)= n^{i}(x)$ и т.д., т.е. все $n^{j+p}(x)$, $(p \geq 0)$, принадлежат множеству $\{n^{i}(x), n^{i+1}(x), ..., n^{j-1}(x)\}$, откуда следует $R(x) \leq j < k$, что противоречит тому, что $R(x)= k$.

Из $R(n)=k$ и $G(x) =\{x, n(x),..., n^{k-1}(x)\}$ следует, что $n^{k}(x) = n^{i}(x)$ для некоторого $i < k$. Если $n^{k}(x) = n^{k-1}(x)$, то $n^{k+j}(x) = n^{k-1}(x)$ для всех $j \geq 0$, $n^{k-1}(x)$ является фиксированной точкой, и по следствию 1.8. отрицание n является сжимающим в x.

Если n сжимающее в x, то из предложения 1.7 следует, что $n^{k}(x)$ находится «между» элементами $\{n^{k-1}(x), n^{k-2}(x)\}$, которые в свою очередь находятся «между» $\{n^{k-3}(x), n^{k-4}(x)\}$ и т.д. Таким образом, равенство $n^{k}(x) = n^{i}(x)$ для некоторого $i < k$, возможно лишь если $i = k - 1$ или $i = k - 2$. Случай $n^{k}(x) = n^{k-1}(x)$ рассмотрен выше. Из $n^{k}(x) = n^{k-2}(x)$, последовательно применяя к обеим частям отрицание, получим $n^{k+2j}(x) = n^{k-2}(x)$ и $n^{k+2j+1}(x) = n^{k-1}(x)$ для всех $j \geq 0$.

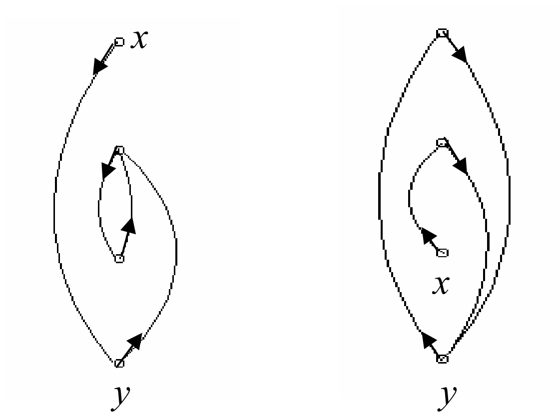
Если n разжимающее в x, то из предложения 1.7 следует, что все элементы из $R(x)$ находятся «между» элементами $\{n^{k-2}(x), n^{k-1}(x)\}$, которые в свою очередь находятся «между» $\{n^{k}(x), n^{k+1}(x)\}$ и т.д., Таким образом, равенство $n^{k}(x) = n^{i}(x)$ для некоторого $i < k$, возможно для разжимающего отрицания лишь если $i = k - 2$. Из $n^{k}(x) = n^{k-2}(x)$, получаем $n^{k+2j}(x) = n^{k-2}(x)$ и $n^{k+2j+1}(x) = n^{k-1}(x)$ для всех $j \geq 0$.

Если $R(x) = \infty$, то $n^{k} \neq n^{j}$ для всех $k \neq j$; $k, j \geq 0$, поскольку из $n^{k}(x)= n^{j}(x)$ для некоторых $k \neq j$ следует $R(x) \leq max\{ j, k \}$.

Предложение 1.13 доказано.

Предыдущие утверждения формализуют представление об элементах, порождаемых сжимающими и разжимающими отрицаниями в точках, как о спиралях, соответственно «закручиваемых внутрь» или «раскручиваемых наружу», причем эти спирали либо бесконечные, либо в конечном случае имеют петлю на конце, состоящую из двух элементов, которые для сжимающих отрицаний могут совпадать, образуя неподвижную точку отрицания. Спирали, порождаемые разными элементами, либо вложены друг в друга, либо совпадают, начиная с некоторого элемента.

На рис. 3 представлены примеры сжимающего и разжимающего в точке x отрицаний. Элементы L представлены вершинами соответствующего графа и упорядочены снизу вверх, в частности, $y < x$. Для обоих примеров отрицаний $R(x) = 4$. Элементы y порождаются элементами x так, что $y= n(x)$ для рис. 3а) и $y = n^2(x)$ для рис. 3б).



а) б)

Рис. 3. а) Отрицание n – сжимающее в точке x.
б) Отрицание n – разжимающее в точке x.

Если ввести индекс нечеткости $d(x)$ элементов из L как $d(x)= x\wedge n(x)$, то несложно увидеть, что имеет место $d(x) \leq d(n(x))$ для сжимающих отрицаний и $d(x) \geq d(n(x))$ для разжимающих отрицаний. Для инволюций нечеткость элемента и его отрицания совпадают. Следовательно, если из контекста ясно, что операция отрицания изменяет нечеткость формулы (высказывания), то тогда, в зависимости от характера этого изменения, нужно использовать сжимающие или разжимающие отрицания.

1.3. Примеры

Рассмотрим простейшие примеры отрицаний, иллюстрирующие введенные понятия. Во всех примерах, если не оговорено противное, предполагается, что L содержит элементы, отличные от 0 и I.

Пусть n – отрицание на L, $L_2 = \{0,I\}$, $L_3 = \{0, c, I\}$, где $0 \le c \le I$, и n_2, n_3 – отрицания на L_2 и L_3, соответственно, причем c – фиксированная точка отрицания n_3, т.е. $n_3(c)= c$. Связь между простейшими отрицаниями n на L и отрицаниями n_2, n_3 на L_2 и L_3 может быть задана с помощью морфизмов $\phi_k:L\rightarrow L_k$ таких, что $\phi_k(n(x))=n_k(\phi_k(x))$, $(k=2,3)$. При интерпретации 0, I и c как “ложь”, “истина” и “неопределенность”, соответствующие морфизмы определяют интерпретацию элементов из L.

Пример 1.14. Пусть L линейно, и c – некоторый элемент из L.

$$n(x)=\begin{cases} I, & \text{если } x=0 \\ c, & \text{если } x\notin\{0,I\} \\ 0, & \text{если } x=I \end{cases}.$$

При $c\notin\{0, I\}$ это отрицание является сжимающим, ни обычным, ни слабым, с фиксированной точкой $s = c$, $R(n) =2$. $\phi_3(0)=0$, $\phi_3(I)=I$, $\phi_3(x)=c$, если $x\notin\{0, I\}$. Интерпретация: «Все, что не истина и не ложь является неопределенностью»

Пример 1.15. При $c = I$, отрицание из примера 1.14 станет таким:

$$n(x)=\begin{cases} I, & \text{если } x\neq I \\ 0, & \text{если } x=I \end{cases}.$$

Это отрицание является обычным, разжимающим, квазистрогим, без фиксированной точки, $R(n) =3$, на L выполняется: $x \vee n(x)= I$. $\phi_2(I)=I$, $\phi_2(x)=0$, если $x < I$. “Все, что не истина, есть ложь”.

Пример 1.16. При $c = 0$, из отрицания примера 1.14 получим:

$$n(x)=\begin{cases} I, & \text{если } x=0 \\ 0, & \text{если } x\neq 0 \end{cases}.$$

Это отрицание является слабым, разжимающим, квазистрогим, без фиксированной точки, $R(n) =3$. На L выполняется: $x \wedge n(x) = 0$. $\phi_2(0)=0$, $\phi_2(x)=I$, если $x > 0$. “Все, что не ложь, есть истина”.

Пример 1.17. Примером разжимающего отрицания, которое не является ни обычным, ни слабым является отрицание

$$n(x)=\begin{cases} I, & \text{если } x< c \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases},$$

где $c\notin\{0, I\}$. Фиксированная точка отсутствует, $R(n)$ =3. $\phi_2(x)$=0, если $x < c$, $\phi_2(x)=I$, если $c \le x$. “Все или истина, или ложь”. Некоторые подходы к формализации нечеткой логики, основанные на подобной интерпретации, сводят ее к двузначной, используя c = 0.5.

Пример 1.18. Примером разжимающего отрицания с фиксированной точкой является отрицание

$$n(x)=\begin{cases} I, & \text{если } x < c \\ c, & \text{если } x = c \\ 0, & \text{если } c < x \end{cases},$$

где $c\notin\{0, I\}$. Элемент $x = c$ является фиксированной точкой, отрицание не является ни обычным, ни слабым, $R(n)$ =3.

Пример 1.19. $L=\{a_1, a_2,\ldots, a_m\}$, $a_k < a_{k+1}$, (k= 1,…, m-1). Здесь $0 = a_1$, $I= a_m$. Элементами шкалы L могут быть, например, лингвистические оценки правдоподобности, истинности, принадлежности. Отрицание $n(a_k)=a_{m-k+1}$, (k= 1,…, m-1) является инволютивным. При нечетном $m = 2p+1$ фиксированной точкой отрицания (центральным элементом L) является элемент $s= a_{p+1}$. Мера нечеткости на этом элементе принимает максимальное значение. При четном $m = 2p$ фиксированная точка отрицания отсутствует. Фокус L состоит из элементов $\{a_p, a_{p+1}\}$, имеющих максимальную нечеткость.

2. Отрицания на [0,1]

2.1. Инволютивные отрицания

Отрицания на L= [0,1] являются частным случаем отрицаний на линейно упорядоченном множестве, рассмотренных в предыдущем разделе, поэтому все свойства отрицаний, определяемые линейным упорядочением элементов из L, имеют место и для отрицаний на [0,1]. В этом и следующих разделах исследуются свойства отрицаний как вещественных функций. В дальнейшем, отрицание Заде будет обозначаться заглавной буквой:

$$N(x) = 1-x.$$

Определение 2.1. Отрицание n:[0,1]→[0,1] называется биективным, если функция n биективная.

Из определения биективной функции как взаимно-однозначной функции и из условия невозрастания отрицания $n(y) \le n(x)$, если $x \le y$, следует, что биективное отрицание является строго убывающей непрерывной функцией.

Строго убывающие непрерывные отрицания на [0,1] называют также строгими отрицаниями, а инволютивные отрицания на [0,1] называют сильными отрицаниями.

У биективного отрицания существует обратная функция n^{-1}, которая также будет биективным отрицанием.

Биективное отрицание имеет фиксированную точку, для нее выполняется $n(s) = s = n^{-1}(s)$. Очевидно, что точка (s,s) является точкой пересечения графиков функций $y(x)= n(x)$ и $y(x)= x$.

Инволютивное отрицание является биективным. Для инволютивного отрицания из $n(n(x) = x$ следует $n^{-1}(x)= n(x)$ для всех $x\in[0,1]$. Таким образом, график инволютивного отрицания симметричен относительно прямой линии $y(x) = x$.

Определение 2.2. Непрерывная строго возрастающая функция f:[0,1]→[0,1] такая, что $f(0)= 0$, $f(1)= 1$ называется автоморфизмом интервала [0,1].

Теорема 2.3. Функция n:[0,1]→[0,1] является инволюцией тогда и только тогда, когда существует автоморфизм f интервала [0,1] такой, что

$$n(x) = f^{-1}(1 - f(x)). \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что (16) удовлетворяет условиям (1), (2) и условию инволютивности $n(n(x))=f^{-1}(1- f(f^{-1}(1-f(x))))= x$.

Доказательство того, что любая инволюция представима в виде (16), основано на следующей лемме.

Лемма 2.4. Пусть n_1 и n_2 – две инволюции на [0,1]. Тогда существует автоморфизм f интервала [0,1] такой, что

$$n_1(x) = f^{-1}(n_2(f(x))). \qquad (17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть s_1 и s_2 - фиксированные точки отрицаний n_1 и n_2, соответственно, и пусть $g:[0,s_1]\to[0,s_2]$ – возрастающая биективная функция, тогда функция

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & \text{если } x \le s_1 \\ n_2(g(n_1(x))), & \text{если } s_1 < x \end{cases}$$

является биективной возрастающей функцией, отображающей [0,1] на [0,1] так, что $f(s_1) = s_2$. Покажем, что для нее выполняется (17). Из определения f следует, что $f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$ при $x \le s_2$ и $f^{-1}(x) = n_1(g^{-1}(n_2(x)))$ при $s_2 < x$. Тогда при $x < s_1$ получим $f(x) = g(x) < s_2$, $n_2(f(x)) = n_2(g(x)) > s_2$ и $f^{-1}(n_2(f(x))) = n_1(g^{-1}(n_2(n_2(g(x))))) = n_1(x)$. Аналогично показывается, что $f^{-1}(n_2(f(x))) = n_1(x)$ при $s_1 < x$.

Полагая в условиях леммы $n_2(x) = N(x) = 1 - x$, получим (16).

Теорема доказана.

Функция $f(x)$ в условиях теоремы 2.3. называется аддитивным генератором инволютивного отрицания. Нетрудно увидеть, для фиксированной точки инволютивного отрицания, генерируемого аддитивным генератором f, выполняется:

$$f(s) = 0.5, \qquad s = f^{-1}(0.5).$$

Таким образом, любое инволютивное отрицание n является сопряженным отрицанию Заде, т.е. существует автоморфизм f интервала [0,1] такой, что $n = f^{-1}\circ N\circ f$. Более обще, пусть, M – группа композиций всех монотонных биективных функций из [0,1] на [0,1], S – множество инволюций на [0,1] и (N) – класс функций из M, сопряженных N.

Теорема 2.5. $S = (N)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что из $h\in(N)$ следует $h\in S$. Из $h\in(N)$ следует существование функции $g\in M$ такой, что $h = g^{-1}\circ N\circ g$, откуда следует, что h - строго убывающая функция, $h(h(x)) = g^{-1}(1 - g(h(x))) = g^{-1}(1 - g(h(x))) = x$, и из $\{g(0), g(1)\} = \{0,1\}$ следует $h(1) = 0$, $h(0) = 1$, т.е. $h\in S$.

Предложение 2.6. Пусть n – инволюция. Тогда

$$n(x) = f^{-1}(1 - f(x)) = g^{-1}(1 - g(x))$$

где f и g - автоморфизмы интервала [0,1], тогда и только тогда, когда существует автоморфизм h интервала [-0.5,0.5] такой, что

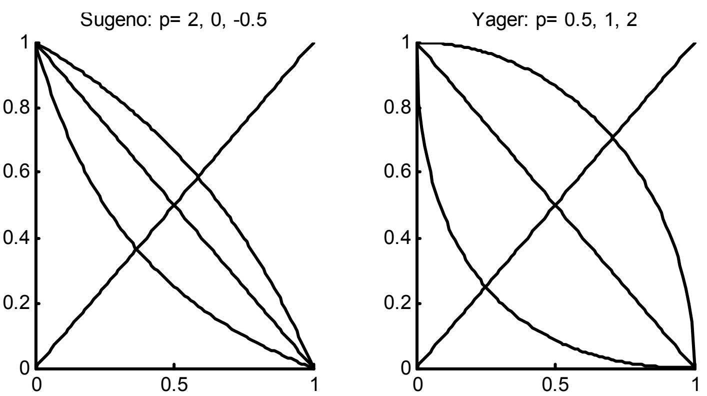
$$g(x) = 0.5 + h(f(x) - 0.5).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $f^{-1}(1 - f(x)) = g^{-1}(1 - g(x))$. Обозначая $y= f(x)$, получим, что это равенство выполняется тогда и только тогда, когда $g(f^{-1}(1- y)) = 1- g(f^{-1}(y))$. Определим функцию h: $[-0.5,0.5] \to [-0.5,0.5]$ так, что $h(z) = g(f^{-1}(z+0.5)) - 0.5$. Ясно, что эта функция является автоморфизмом [-0.5,0.5] и для нее выполняется $g(f^{-1}(y))= 0.5 + h(y - 0.5)$, откуда следует $g(x) = 0.5 + h(f(x) - 0.5)$.

Примером параметрического класса инволюций, построенных по правилу (16), является отрицание Сугено:

$$n(x) =(1-x)/(1+px), \qquad (p > -1),$$

генерируемое генератором $f(x) = log(1+px)/log(1+p)$. Это отрицание является единственным рациональным отрицанием вида $(ax+b)/(cx+d)$. Фиксированная точка отрицания Сугено равна $s= ((1+p)^{1/2}-1)/p$.



а) б)

Рис. 4. Графики отрицаний Сугено и Ягера:
а) отрицание Сугено, p = 2, 0, -0.5; б) отрицание Ягера, p = 0.5, 1, 2.

Другим примером построенного таким образом отрицания является отрицание Ягера:

$$n(x) = \sqrt[p]{1 - x^p}, \qquad p \in (0,\infty),$$

генерируемое генератором $f(x) = x^p$. Фиксированная точка отрицания Ягера равна $s = \sqrt[p]{0.5}$.

Графики отрицаний Сугено и Ягера для разных значений параметра p приведены на рис. 4, где приведен также график функции $y = x$.

Рассматриваемые ниже методы генерации инволютивных отрицаний используют свойство инволюций $n(x) = n^{-1}(x)$, которое определяет симметрию графика инволютивного отрицания относительно прямой $y = x$. Эти методы будут в следующем разделе использоваться при характеризации сжимающих и разжимающих отрицаний на [0,1]. Эти методы представляют также самостоятельный интерес при построении инволютивных отрицаний в задачах нечеткого моделирования.

Пусть f – произвольное монотонное биективное отображение [0,1] на [0,1]. Введем обозначения

$$f_{[-]}(x) = min\{f(x), f^{-1}(x)\},$$
$$f_{[+]}(x) = max\{f(x), f^{-1}(x)\}.$$

Отметим следующие свойства введенных функций.

1) Если f – автоморфизм интервала [0,1], то $f_{[-]}$ и $f_{[+]}$ также являются автоморфизмами интервала [0,1], причем, $f_{[-]}^{-1} = f_{[+]}$, $f_{[+]}^{-1} = f_{[-]}$ и для всех $x \in [0,1]$ выполняется

$$f_{[-]}(x) \leq x \leq f_{[+]} .$$

2) Если n – инволюция, то

$$n_{[-]} = n_{[+]} = n .$$

Предложение 2.7. Если n - биективное отрицание, то функции $n_{[-]}$ и $n_{[+]}$ являются инволюциями.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения $n_{[-]}$ и $n_{[+]}$ следует, что они являются биективными отрицаниями. Имеем

$$n_{[-]}(x) = \begin{cases} n(x), & если\ \ n(x) \leq n^{-1}(x) \\ n^{-1}(x), & если\ n^{-1}(x) < n(x) \end{cases},$$
$$n_{[+]}(x) = \begin{cases} n^{-1}(x), & если\ \ n(x) \leq n^{-1}(x) \\ n(x), & если\ n^{-1}(x) < n(x) \end{cases}. \qquad (18)$$

Покажем, что $n_{[-]}$ является инволюцией. Если $n(x) \leq n^{-1}(x)$, то $n_{[-]}(x) = n(x)$. Обозначим $y = n(x)$. Тогда $n(y) = n(n(x)) \geq n(n^{-1}(x)) = x = n^{-1}(n(x)) = n^{-1}(y)$.

Из $n(y) \geq n^{-1}(y)$ следует $n_{[-]}(y) = n^{-1}(y)$ и $n_{[-]}(n_{[-]}(x)) = n_{[-]}(n(x)) = n_{[-]}(y) = n^{-1}(y) = n^{-1}(n(x)) = x$. Аналогично, из $n^{-1}(x) \leq n(x)$, выводится $n_{[-]}(n_{[-]}(x)) = x$.

Доказательство инволютивности $n_{[+]}$ проводится аналогично.

Теорема 2.8. Функции n_1, n_2:[0,1]→[0,1] являются инволюциями тогда и только тогда, когда существует автоморфизм f интервала [0,1] такой, что

$$n_1(x) = (1 - f)_{[-]}(x), \tag{19}$$
$$n_2(x) = (1 - f)_{[+]}(x). \tag{20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть n - инволюция. Тогда $f(x) = 1 - n(x)$ является автоморфизмом интервала [0,1] таким, что $(1 - f)_{[-]}(x) = n_{[-]}(x) = n(x)$ и $(1 - f)_{[+]}(x) = n_{[+]}(x) = n(x)$.

Пусть f – автоморфизм интервала [0,1]. Тогда $n(x) = 1 - f(x)$ является биективным отрицанием и из предложения 2.7 следует справедливость теоремы.

Учитывая, что $(1 - f(x))^{-1} = f^{-1}(1 - x)$, представим (19), (20) также в виде:

$$n_1(x) = min\{1 - f(x), f^{-1}(1 - x)\},$$
$$n_2(x) = max\{1 - f(x), f^{-1}(1 - x)\}.$$

Предложение 2.9. Пусть n - биективное отрицание, и s – его фиксированная точка. Тогда функции

$$n_1(x) = \begin{cases} n(x), & \text{если } x \leq s \\ n^{-1}(x), & \text{если } s < x \end{cases}, \tag{21}$$

$$n_2(x) = \begin{cases} n^{-1}(x), & \text{если } x \leq s \\ n(x), & \text{если } s < x \end{cases}. \tag{22}$$

являются инволютивными отрицаниями.

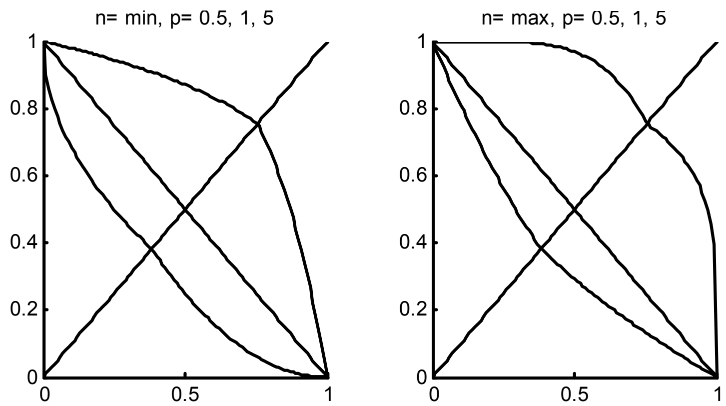
Д о к а з а т е л ь с т в о. Из построения n_1 и n_2 следует, что они являются биективными отрицаниями с фиксированной точкой s. Если $x < s$, то $n(x) > n(s) = s$ и $n_1(n_1(x)) = n_1(n(x)) = n^{-1}(n(x)) = x$. Если $x > s$, то $n^{-1}(x) < n^{-1}(s) = s$ и $n_1(n_1(x)) = n_1(n^{-1}(x)) = = n(n^{-1}(x)) = x$. Аналогично доказывается инволютивность n_2.

Заметим, что соотношения (18) и (21), (22) в общем случае определяют разные отрицания. Однако, если $n(x) \leq n^{-1}(x)$ для всех $x \leq s$, либо $n^{-1}(x) \leq n(x)$ для всех $x \leq s$, то определяемые (18) и (21), (22) пары отрицаний $\{n_1, n_2\}$ совпадают.

Примером отрицаний, построенных по правилам (19), (20) с генератором $f(x) = x^p$, являются отрицания:

$$n_1(x) = \min\left(1 - x^p, \sqrt[p]{1 - x}\right)$$
$$n_2(x) = \max\left(1 - x^p, \sqrt[p]{1 - x}\right)$$

Графики этих отрицаний для разных значений параметров p приводятся на рис. 5.



а) б)

Рис. 5. Графики инволютивных отрицаний с генератором $f(x) = x^p$:
а) формула (19), p= 0.5, 1, 5; б) формула (20), p= 0.5, 1, 5.

С практической точки зрения может возникнуть задача построения инволютивного отрицания с заданной фиксированной точкой s. Решение этой задачи может быть основано на следующей теореме.

Теорема 2.10. Функция n:[0,1]→[0,1] является инволюцией с фиксированной точкой $s\in(0,1)$ тогда и только тогда, когда существует автоморфизм f интервала [0,1] такой, что

$$n(x) = \begin{cases} 1-(1-s)f\left(\dfrac{x}{s}\right), & \text{если } x \le s \\ sf^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1-s}\right), & \text{если } s < x \end{cases} \tag{23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f – автоморфизм и n определяется по (23). Монотонное убывание n и выполнение условий $n(0) = 1$, $n(1) = 0$, $n(s) = s$, очевидно. Обозначим $g_1(x) = 1- (1- s)f(x/s)$, $g_2(x) = sf^{-1}((1-x)/(1-s))$, тогда $g_2(x) = g_1^{-1}(x)$. Доказательство инволютивности n аналогично доказательству инволютивности отрицания в предложении 2.9.

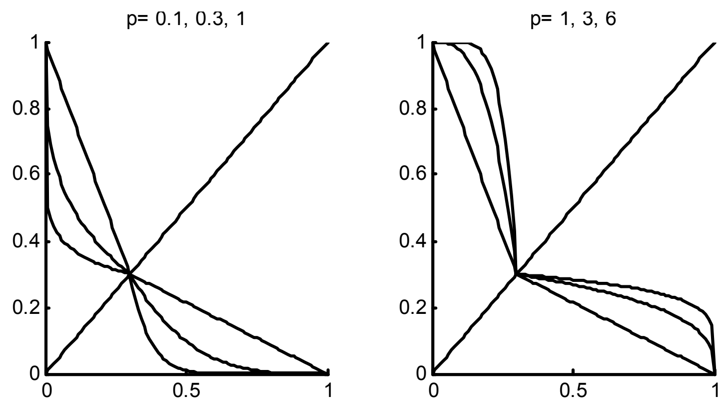
Пусть n – инволюция с фиксированной точкой s. Тогда функция $f(x)= (1-n(xs))/(1-s)$ биективная, строго возрастающая и $f(0)=0$, $f(1)=1$. $f^{-1}(x)= n(1- (1- s)x)/s$. Если $x \le s$, то (23) определяет $n(x)$: $1- (1- s)f(x/s) = 1- (1- s)(1-$

$n(xs/s))/(1\text{-}s) = n(x)$. Если $s < x$, то также получаем $n(x)$: $sf^{-1}((1\text{-}x)/(1\text{-}s)) = sn(1\text{-}(1\text{-}s)(1\text{-}x)/(1\text{-}s))/s = n(x)$.

Примером отрицания, построенного по правилу (23) с генератором $f(x) = x^p$, является отрицание:

$$n(x) = \begin{cases} 1-(1-s)\left(\dfrac{x}{s}\right)^p, & \text{если } x \le s \\ s\sqrt[p]{\dfrac{1-x}{1-s}}, & \text{если } s < x \end{cases}. \tag{24}$$

Графики этого отрицания для $s = 0.3$ и различных значений параметра p приведены на рис. 6. При $p = 1$ это отрицание задается двумя отрезками прямых, соединяющими точки (0,1) и (1,0) с точкой (s,s), лежащей на прямой $y = x$.



а) б)

Рис. 6. Графики инволютивных отрицаний (24) с фиксированной точкой s=0.3 для значений параметра p: а) p= 0.1, 0.3 и 1; б) p= 1, 3 и 6.

Предложение 2.11. Если n_1 и n_2 – инволютивные отрицания с фиксированной точкой $s_1 = s_2 = s$, то $n_1(x) \le n_2(x)$ для всех $x \le s$ тогда и только тогда, когда $n_1(x) \le n_2(x)$ для всех $x \ge s$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n_1(x) \le n_2(x)$ для всех $x \le s$ и пусть $y \ge s$. Обозначим $x = n_2(y)$, тогда $x \le s$ и $n_2(y) = x = n_1(n_1(x)) \ge n_1(n_2(x)) = n_1(n_2(n_2(y))) = n_1(y)$. Аналогично показывается, что из $n_1(x) \le n_2(x)$ для всех $x \ge s$ следует $n_1(y) \le n_2(y)$ для любого $y \le s$.

Указанное в предложении 2.11 свойство инволюций наглядно демонстрируется на приведенных выше графиках. В следующем разделе будет показано, что сжимающие и разжимающие отрицания обладают в определенном смысле противоположным свойством.

2.2. Сжимающие и разжимающие отрицания на [0,1]

Из определения сжимающих и разжимающих отрицаний следует, что n является сжимающим в $x\in[0,1]$ (сжимающим на [0,1]) тогда и только тогда, когда в $x\in[0,1]$ (на [0,1]) выполняется одно из условий:

$$x \le n(n(x)) \le n(x), \tag{25}$$
$$n(x) \le n(n(x)) \le x. \tag{26}$$

Аналогично, n является разжимающим в $x\in[0,1]$ (разжимающим на [0,1]) тогда и только тогда, когда в $x\in[0,1]$ (на [0,1]) выполняется одно из условий:

$$n(n(x)) \le x \le n(x), \tag{27}$$
$$n(x) \le x \le n(n(x)). \tag{28}$$

Теорема 2.12. Биективное отрицание n является сжимающим в $x\in[0,1]$ (сжимающим на [0,1]) тогда и только тогда, когда n^{-1} является разжимающим в $x\in[0,1]$ (разжимающим на [0,1]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что двукратное применение n^{-1} к элементам неравенств (25), (26) преобразует их в (27), (28) для отрицания n^{-1} и наоборот. Например, из (25), (26) получим:

$$n^{-1}(n^{-1}(x)) \le x \le n^{-1}(x),$$
$$n^{-1}(x) \le x \le n^{-1}(n^{-1}(x)).$$

Для биективных, а значит строго убывающих отрицаний на [0,1], следующее предложение устанавливает простой признак, характеризующий сжимающие и разжимающие отрицания.

Предложение 2.13. Биективное отрицание n является сжимающим тогда и только тогда, когда для всех $x\in[0,1]$

$$\text{из } x \le n(x) \text{ следует } x \le n(n(x)), \tag{29}$$

и является разжимающим тогда и только тогда, когда для всех $x\in[0,1]$

$$\text{из } x \le n(x) \text{ следует } n(n(x)) \le x. \tag{30}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что если n – сжимающее, то на [0,1] выполняется (29). Пусть на [0,1] имеет место (29). Покажем, что n сжимающее. Если $x \le n(x)$, то применяя отрицание, получим $n(n(x)) \le n(x)$, и из (29) следует (25). Покажем, что для всех x таких, что $n(x) \le x$, выполняется (26). Предположим, что это не так, и для некоторого $x_1 \in [0,1]$ имеет место $n(x_1) \le x_1$ и $x_1 < n(n(x_1))$. Обозначим $y = n(x_1)$, тогда $y < n(y)$ и из (29) следует $n(x_1) = y \le n(n(y)) = n(n(n(x_1)))$. В то же время из $x_1 < n(n(x_1))$ и строгого убывания n следует $n(n(n(x_1))) < n(x_1)$. Полученное противоречие доказывает выполнение (26). Таким образом, n – сжимающее отрицание.

Аналогично доказывается предложение для разжимающих отрицаний.

Так как для инволютивных отрицаний выполняется $n(n(x)) = x$, а условия $x \le n(x)$ и $n(x) \le x$ эквивалентны для биективных отрицаний условиям $x \le s$ и $s \le x$, где s – фиксированная точка отрицания, то указанные выше свойства сжимающих и разжимающих отрицаний дают основание для следующей характеризации этих отрицаний.

Теорема 2.14. Биективное отрицание n с фиксированной точкой s является сжимающим тогда и только тогда, когда существует инволюция n_1 такая, что для всех $x \in [0,1]$ выполняется

$$\begin{aligned} &n(x) \le n_1(x), \text{ если } x < s,\\ &n_1(s) = n(s) = s,\\ &n_1(x) \le n(x), \text{ если } x > s, \end{aligned} \tag{31}$$

и отрицание n является разжимающим тогда и только тогда, когда существует инволюция n_1 такая, что для всех $x \in [0,1]$ выполняется

$$\begin{aligned} &n_1(x) \le n(x), \text{ если } x < s,\\ &n_1(s) = n(s) = s,\\ &n(x) \le n_1(x), \text{ если } x > s. \end{aligned} \tag{32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть n_1 – инволюция с фиксированной точкой s, и выполняется (31). Покажем, что n – сжимающее. Пусть $x < s$, тогда $n(x) \le n_1(x)$ и $n(x) > s$, что дает $n(n(x)) \ge n_1(n(x)) \ge n_1(n_1(x)) = x$, и из предложения 2.13 следует, что n – сжимающее.

Пусть n – сжимающее отрицание. Рассмотрим функцию:

$$n_1(x) = \begin{cases} n(x), & \text{если } x \le s \\ n^{-1}(x), & \text{если } x > s \end{cases}.$$

Из предложения 2.9 следует, что эта функция является инволютивным отрицанием. Очевидно, что она удовлетворяет первым двум условиям из (31). Поскольку n – сжимающее, то для него выполняется (26) и из $n(n(x)) \le x$ для $x > s$ следует $n(x) \ge n^{-1}(x) = n_1(x)$, т.е. выполняется третье условие из (31).

Аналогично проводится доказательство для разжимающих отрицаний.

Теорема 2.14 дает способ построения сжимающих и разжимающих отрицаний на основе инволютивного отрицания и обобщает следующий способ построения сжимающих и разжимающих отрицаний из [54].

Предложение 2.15. Пусть g и h автоморфизмы интервала [0,1], и $s\in(0,1)$, тогда функция

$$n(x)=\begin{cases}1-(1-s)g\left(\dfrac{x}{s}\right), & \text{если } x\le s\\ s-s\cdot h\left(\dfrac{x-s}{1-s}\right), & \text{если } s<x\end{cases} \tag{33}$$

является сжимающим отрицанием, если $h(x)\le x\le g(x)$ на [0,1], и разжимающим отрицанием, если $g(x)\le x\le h(x)$ на [0,1].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $n(0) = 1$, $n(1) = 0$, $n(s) = s$, и n – биективное отрицание. Если $h(x)\le x\le g(x)$ на [0,1], то в соответствии с теоремой 2.14 отрицание n – является сжимающим по отношению к инволютивному отрицанию

$$n_1(x)=\begin{cases}1-(1-s)\dfrac{x}{s}, & \text{если } x\le s\\ s-s\cdot\dfrac{x-s}{1-s}, & \text{если } s<x\end{cases}=\begin{cases}1-(1-s)\dfrac{x}{s}, & \text{если } x\le s\\ s\cdot\dfrac{1-s}{1-s}, & \text{если } s<x\end{cases}, \tag{34}$$

получаемому из (23) при $f(x) = x$. Аналогично, если $g(x)\le x\le h(x)$ на [0,1], то в соответствии с теоремой 2.14 отрицание n – является разжимающим по отношению к инволютивному отрицанию n_1.

Поскольку из $x\le g(x)$ на [0,1] следует $g^{-1}(x)\le x$ на [0,1], то в условиях теоремы 2.15 вместо функции h может использоваться функция g^{-1} и наоборот. Если f - произвольный автоморфизм интервала [0,1], то в условиях теоремы 2.15 вместо функций g и h могут использоваться соответственно функции $f_{[-]}$ и $f_{[+]}$.

Простым признаком сжимаемых и разжимаемых отрицаний, который следует из предложения 2.15 является следующий: если отрицание вогнуто слева от точки его пересечения с прямой $y = x$ и выпукло справа от этой точки, то оно сжимающее, и наоборот, если выполняются противоположные свойства, то оно разжимающее.

Примеры сжимающих и разжимающих отрицаний, построенных по правилу (33) с генераторами $g(x) = x^{p}$, и $h(x) = x^{1/p}$ приведены на рис. 7. Там же приведены также графики кусочно-линейной инволюции (34), получаемой при значении параметра $p = 1$.

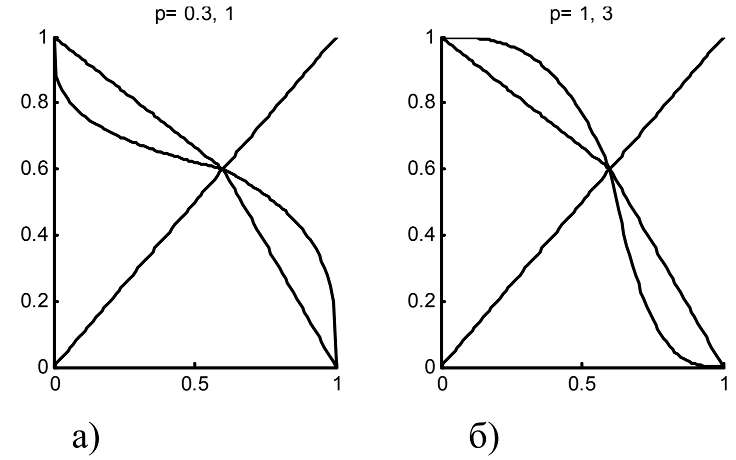


Рис. 7. Отрицания, построенные по правилу (33) с фиксированной точкой s = 0.6 и генераторами g=x^p и h =g^{-1} = $x^{1/p}$:
а) сжимающие с p= 0.3 и 1; б) разжимающие с p= 1 и 3.

Модификацией формулы (33) построения сжимающих и разжимающих отрицаний является следующая:

$$n(x) = \begin{cases} 1-(1-s)g\left(\dfrac{x}{s}\right), & \text{если } x \le s \\ s\cdot g\left(\dfrac{1-x}{1-s}\right), & \text{если } s < x \end{cases}$$

определяющая сжимающее отрицание, если $g(x) \ge x$ для всех $x\in[0,1]$, и разжимающее отрицание, если $g(x) \le x$ для всех $x\in[0,1]$.

Следующие способы построения сжимающих отрицаний непосредственно основаны на теореме 2.14.

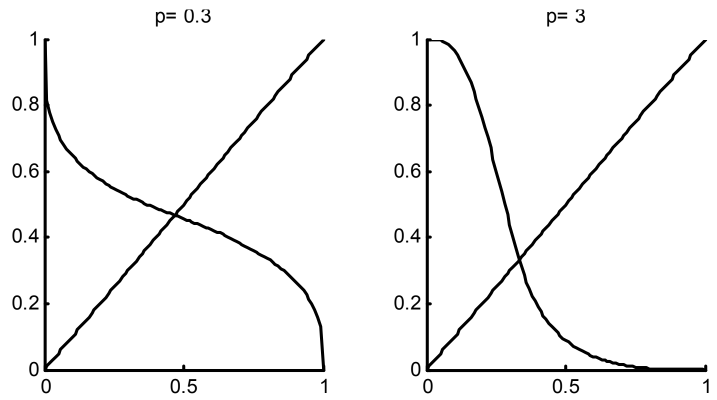
Предложение 2.16. Пусть n_1 – инволютивное отрицание с фиксированной точкой s, и g – автоморфизм интервала [0,1], тогда функция

$$n(x) = \begin{cases} n_1\left(s\cdot g\left(\dfrac{x}{s}\right)\right), & \text{если } x \le s \\ n_1\left(1-(1-s)g\left(\dfrac{1-x}{1-s}\right)\right), & \text{если } s < x \end{cases} \qquad (35)$$

является сжимающим отрицанием, если $g(x) \ge x$ на [0,1], и разжимающим отрицанием, если $g(x) \le x$ на [0,1].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из построения следует, что n является биективным отрицанием с фиксированной точкой s. Из $g(x) \geq x$ следует $sg(x/s) \geq x,$ и из убывания n_1 следует, что $n(x) \leq n_1(x),$ если $x \leq s$. Аналогично, из $g(x) \geq x$ следует $(1\text{-}(1\text{-}s)g((1\text{-}x)/(1\text{-}s))) \leq x,$ и $n(x) \geq n_1(x),$ если $s < x,$ и из теоремы 2.14 следует, что $n(x)$ - сжимающее отрицание. Двойственно, $n(x)$ - разжимающе отрицание, если $g(x) \leq x$ на [0,1].

Пример отрицаний, построенных по формуле (35) на основе отрицания Сугено с параметром p и автоморфизмом $g(x) = x^p$ для значений параметра p: а) $p = 0.3$; б) p=3, приведен на рис. 8.



а) б)

Рис. 8. Сжимающие и разжимающие отрицания, построенные по формуле (35) на основе отрицания Сугено и автоморфизма $g(x)= x^p$ с параметрами: а) $p = 0.3$; б) p=3.

Другой способ построения сжимающих и разжимающих отрицаний дает формула

$$n(x) = \begin{cases} n_1\left(s \cdot g\left(\dfrac{x}{s}\right)\right), & \text{если } x \leq s \\ n_1\left(s + (1-s)h\left(\dfrac{x-s}{1-s}\right)\right), & \text{если } s < x \end{cases}$$

где g и h – автоморфизмы интервала [0,1]. Это отрицание является сжимающим, если $h(x) \leq x \leq g(x)$ для всех $x \in [0,1]$. Отрицание является разжимающим, если $g(x)$ и $h(x)$ удовлетворяют противоположным неравенствам.

Если в предыдущих двух методах построения сжимающих и разжимающих отрицаний на основе теоремы 2.14 использовалась модификация аргумента инволютивного отрицания, то в следующих методах осуществляется модификация самих значений инволютивных отрицаний.

Предложение 2.17. Пусть n_1 – инволютивное отрицание с фиксированной точкой s, и g, h – автоморфизмы интервала [0,1], тогда функция

$$n(x)=\begin{cases} s+(1-s)g\left(\dfrac{n_1(x)-s}{1-s}\right), & \text{если } x\le s\\ s\cdot h\left(\dfrac{n_1(x)}{s}\right), & \text{если } s<x \end{cases}$$

является сжимающим отрицанием, если $g(x)\le x\le h(x)$ для всех $x\in[0,1]$, и n является разжимающим отрицанием, если имеют место противоположные неравенства.

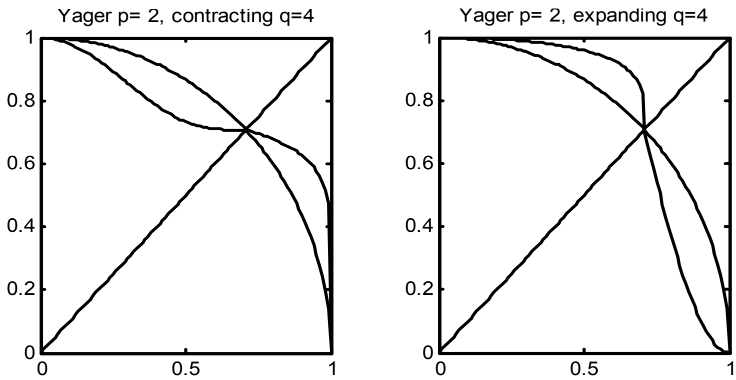
Д о к а з а т е л ь с т в о. Из построения следует, что $n(0) = 1$, $n(1) = 0$, $n(s) = s$. Если $h(x) = x = g(x)$ для всех $x\in[0,1]$, то очевидно, что $n = n_1$. При выполнении $g(x)\le x\le h(x)$ на [0,1] следует выполнение условий (31), т.е. n является сжимающим отрицанием, и при выполнении $h(x)\le x\le g(x)$ на [0,1] следует выполнение условий (32), т.е. n является разжимающим отрицанием.

Заметим, что в качестве автоморфизмов в последних формулах могут использоваться автоморфизмы $f_{[-]}$ и $f_{[+]}$, соответствующие автоморфизму f, порождающему инволютивное отрицание n_1. Таким образом, предложенные методы позволяют генерировать сжимающие и разжимающие отрицания с помощью произвольного автоморфизма f интервала [0,1].

Приведем пример генерации сжимающих и разжимающих отрицаний на основе метода, рассмотренного в предложении 2.17. В качестве инволютивного отрицания возьмем отрицание Ягера с генератором $f = x^p$ и фиксированной точкой $s= (0.5)^{1/p}$. Положим $g= e_{[-]}$, $h= e_{[+]}$, где $e= x^q$. При $q\ge 1$ имеем $g= x^q$, $h= x^{1/q}$. Тогда получим такое сжимающее отрицание:

$$n(x)=\begin{cases} s+(1-s)\left(\dfrac{\sqrt[p]{1-x^p}-s}{1-s}\right)^q, & \text{если } x\le s\\ s\cdot\sqrt[q]{\left(\dfrac{\sqrt[p]{1-x^p}}{s}\right)}, & \text{если } s<x \end{cases}.$$

На рис 9а) приведен график этого отрицания с параметром $q = 4$ вместе с графиком соответствующего отрицания Ягера с параметром $p = 2$. Если в формуле предложения 2.17 g и h поменять местами, то получим разжимающее отрицание, приведенное на рис. 9б). Заметим, что если в этом случае в качестве генератора e взять генератор f, используемый для построения отрицания Ягера, т.е. положить $q= p,$ то справа от фиксированной точки формула разжимающего отрицания будет иметь более простой вид.



а) б)

Рис. 9. Сжимающее и разжимающее отрицания, построенные из отрицания Ягера с параметром p= 2: а) сжимающее; б) разжимающее.

Ясно, что на основе теоремы 2.14 могут быть предложены и другие методы генерации сжимающих и разжимающих отрицаний.

2.3. Биективные отрицания на [0,1]

Основным результатом этого раздела является следующая теорема.

Теорема 2.18. Множество неинволютивных элементов биективного отрицания n на [0,1] имеет единственное представление в виде объединения непересекающихся открытых интервалов, на каждом из которых n является либо сжимающим, либо разжимающим, и в каждом таком интервале для любого его элемента x последовательности $a_k= n^{2k}(x)$ и $a_k^{-1}= n^{-2k}(x)$ принадлежат этому интервалу, и имеют пределами инволютивные элементы, совпадающие с концами интервалов.

Отрицание называется сжимающим (разжимающим) на интервале, если оно сжимающее (разжимающее) в каждой точке интервала.

Докажем предварительно ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 2.19. Неинволютивные элементы биективного отрицания имеют бесконечный ранг.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть n биективно. Предположим, что в [0,1] существует неинволютивный элемент x с конечным рангом $R(x) = k$. Если $k= 2$, то из предложения 1.13 получим $G(x) = \{x, n(x)\}$ и $n(n(x)) = x$ или $n(n(x)) = n(x)$, что противоречит либо неинволютивности x, либо биективности n, так как $n(x) \neq x$. Если $k \geq 3$, то из предложения 1.13 следует, что $G(x)$ содержит по крайней мере 3 различных элемента: $y = n^{k-1}(x)$, $z = n^{k-2}(x)$, и $v = n^{k-3}(x)$. Возможны два случая:

1) $n^k(x) = n^{k-1}(x)$, что дает $n(y) = n^{k-1}(x)= n(n^{k-2}(x)) = n(z)$, что противоречит биективности n, так как $y \neq z$.

2) $n^k(x) = n^{k-2}(x)$, что дает $n(y)= n^{k-2}(x)= n(n^{k-3}(x))= n(v)$, что также противоречит биективности n, так как $y \neq v$.

Полученные противоречия доказывают лемму.

Следствие 2.20. Биективное отрицание имеет конечный ранг тогда и только тогда, когда оно является инволюцией.

Таким образом, неинволютивные отрицания конечного ранга должны быть либо нестрого убывающими, либо разрывными функциями. Слабые и обычные отрицания, отличные от инволюций, являются примерами таких отрицаний.

С учетом следствия 1.12 получаем также следующее

Следствие 2.21. Для биективного отрицания n на [0,1] выполняется

$R(x) =R(n^k(x))$ для всех $x\in[0,1]$ и всех целых $k \geq 0$.

Из предложения 1.7 и следствия 2.21 следует

Следствие 2.22. Биективное отрицание n является сжимающим, разжимающим или инволютивным в точках $n^k(x)\in[0,1]$ одновременно для всех целых $k \geq 0$.

Предложение 2.23. Для биективного отрицания n для всех $x\in[0,1]$ и всех $j \geq k \geq 0$ возможны только следующие пары соотношений:

$$n^{-2j}(x) \le n^{-2k}(x) \le x \le n^{2k}(x) \le n^{2j}(x) \quad (36)$$

и

$$n^{2j+1}(x) \le n^{2k+1}(x) \le n(x) \le n^{-2k-1}(x) \le n^{-2j-1}(x) \quad (37)$$

или

$$n^{2j}(x) \le n^{2k}(x) \le x \le n^{-2k}(x) \le n^{-2j}(x) \quad (38)$$

и

$$n^{-2j-1}(x) \le n^{-2k-1}(x) \le n(x) \le n^{2k+1}(x) \le n^{2j+1}(x) \quad (39)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как n^{-1} является отрицанием, то для него выполняется

$$n^{-1}(y) \le n^{-1}(x), \text{ если } x \le y. \quad (40)$$

Обозначим $y = n^2(x)$. Тогда $n^{-2}(y) = x$, $n^{-4}(y) = n^{-2}(x)$. Если $x \le n^2(x)$, то $n^{-2}(y) \le y$, и дважды применяя (40), получим, $n^{-4}(y) \le n^{-2}(y) \le y$, т.е. $n^{-2}(x) \le x \le n^2(x)$. Многократно применяя отрицания к обеим частям неравенств, получим (36) и (37). Аналогично, если $n^2(x) \le x$, получим (38) и (39).

Предложение 2.24. Пусть n – биективное отрицание. Тогда для любого $x\in[0,1]$ последовательности $a_k = n^{2k}(x)$, $b_k = n^{2k+1}(x)$, $a_k^{-1} = n^{-2k}(x)$, $b_k^{-1}= n^{-2k-1}(x)$ имеют пределами некоторые инволютивные элементы a, b, a^{-1} и b^{-1}, соответственно, такие, что $n(a) = b$ и $n^{-1}(a^{-1})=b^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предложения 2.23 следует, что последовательности $a_k = n^{2k}(x)$, $b_k = n^{2k+1}(x)$ будут невозрастающими или неубывающими, и из их ограниченности следует существование $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$ и $b = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$. Из биективности и, следовательно, непрерывности n получим $n(a)=n\left(\lim\limits_{k\to\infty} a_k\right)= \lim\limits_{k\to\infty} n(a_k)= \lim\limits_{k\to\infty} n^{2k+1}(x)=b$, и аналогично $n(n(a) = n(b) = a$. Аналогичный результат имеет место и для n^{-1}.

Определение 2.25. Пусть n – некоторое биективное отрицание и $x\in[0,1]$. Обозначим $a^L(x) = min(a^{-1},a)$, $a^R(x) = max(a^{-1},a)$, $b^L(x) = min(b^{-1},b)$, $b^R(x) = max(b^{-1},b)$, где $a^{-1},a,\ b^{-1},\ b$ определены выше. Интервалы $A(x) = [a^L(x),\ a^R(x)]$ и $B(x) = [b^L(x),\ b^R(x)]$ будут называться интервалами, порождаемыми элементом x. Для неинволютивных элементов x $A^o(x)$ и $B^o(x)$ будут обозначать соответствующие открытые интервалы $(a^L(x),a^R(x))$ и $(b^L(x),b^R(x))$. Для инволютивных элементов x обозначим $A^o(x)=\{x\}$, $B^o(x)=\{n(x)\}$.

Отметим следующие очевидные свойства этих интервалов.

Предложение 2.26. Для всех $x\in[0,1]$ выполняется:

1) $x\in A^o(x)$,

2) $B^o(x) = A^o(n(x))$,

3) $G(x)\cup G^{-1}(x)\subseteq A(x)\cup B(x)$.

Предложение 2.27. В $A(x)$ и $B(x)$ инволютивными элементами являются только концы этих интервалов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $y \in A(x)$ является инволютивным элементом отрицания n. Если $x \le y$, тогда, последовательно применяя отрицание, получим $n^2(x) \le n^2(y) = y$ и $n^{2k}(x) \le y$ для всех $k \ge 1$. Из инволютивности y по отрицанию n следует инволютивность y по отрицанию n^{-1}, откуда также получаем $n^{-2k}(x) \le y$ для всех $k \ge 1$. Из обоих полученных неравенств, непрерывности n и n^{-1} и из предложения 2.24 получаем $a^R(x) \le y$, что дает $a^R(x) = y$. Если $y \le x$, аналогично получаем $a^L(x) = y$. Инволютивность $a^R(x)$ и $a^L(x)$ следует из предложения 2.24. Из предложения 2.26 следует аналогичный результат и для $B(x)$.

Предложение 2.28. Для любых $x,y \in [0,1]$ следующие соотношения эквивалентны:

1) $A^o(x) = A^o(y)$,
2) $B^o(x) = B^o(y)$,
3) $x \in A^o(y)$,
4) $y \in A^o(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из 1) следует $A(x) = A(y)$, и применяя отрицание n к $a^L(x) = a^L(y)$, $a^R(x) = a^R(y)$, из предложения 2.24 получим $B(x) = B(y)$, откуда следует 2). Обратно, из 2) следует 1). Из 1) и предложения 2.25 следует 3) и 4).

Покажем, что из 3) следует 1). Если $A^o(y) = \{y\}$, тогда 1) очевидно. Предположим, что $A^o(y) \ne \{y\}$, т.е. y неинволютивно. Тогда из предложения 2.26 следует, что все элементы $A^o(y)$ и, следовательно, x неинволютивны. Из $x \in A^o(y)$ и $x \in A^o(x)$ следует, что интервалы $A(x)$ и $A(y)$ пересекаются, и это пересечение содержит только неинволютивные точки. Тогда из предложения 2.27 следует, что граничные точки обоих интервалов совпадают, что дает $A^o(x) = A^o(y)$. Аналогично, 1) следует из 4).

Предложение 2.29. Для каждого $x \in [0,1]$ биективное отрицание является сжимающим или разжимающим на $A^o(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для инволютивного x заключение предложения очевидно. Пусть x – неинволютивно и выполнено, например, (36) и $a^L(x) = \lim\limits_{k\to\infty} n^{-2k}(x)$, $a^R(x) = \lim\limits_{k\to\infty} n^{2k}(x)$. Для любого $y \in A^o(x)$ выполяется $a^L(x) < y < a^R(x)$, и из (36) следуют две возможности:

$$n^{2k}(x) \le y \le n^{2k+2}(x) \tag{41}$$

или

$$n^{-2k-2}(x) \le y \le n^{-2k}(x) \tag{42}$$

для некоторого $k \in \{0,1,2,...\}$. Если выполняется (41), то, применяя отрицание, получим

$$n^{2k+3}(x) \le n(y) \le n^{2k+1}(x), \qquad (43)$$

что дает

$$n^{2k}(x) \le y \le n^{2k+2}(x) \le n^{2}(y) \le n^{2k+4}(y). \qquad (44)$$

Если n – сжимающее в x, то из (44) следует (11) и из (43), (44) следует сжимаемость n в x. Если n – разжимающее в x, тогда из (42) следует (12) и из (43) следует, что n также разжимающее в y. Аналогично, если y удовлетворяет (42), получим, что n^{-1} одинаковое в x и y и из теоремы 2.12 следует, что n также одинаковое в x и y. Доказательство для случая $a^L(x)= \lim\limits_{k\to\infty} n^{2k}(x)$ и $a^R(x)= \lim\limits_{k\to\infty} n^{-2k}(x)$ аналогично.

Полученные результаты доказывают теорему 2.18.

Библиографические комментарии к главе 2

Отрицания в формальной и многозначной логике исследовались в [20, 28]. Связь операции дополнения нечетких множеств с операцией отрицания исследовалась в [92] с позиций теории категорий. В [101] исследовались отрицания, минимизирующие отличия от булевых отрицаний. В [118] исследуются свойства отрицаний на решетках и их связь с мерой нечеткости элементов. Отрицания на упорядоченных лингвистических метках рассматриваются в [109]. В [104] исследуются свойства отрицаний в логическом программировании. Дуальные изоморфизмы, инволюции и интуиционистские отрицания на решетке нечетких множеств исследуются в [68]. Слабые и интуиционистские отрицания изучаются в [69]. В работах [96, 97] изучаются инволюции специального вида. В работах [114, 115] исследуются методы генерации отрицаний операторами компенсации и вопросы сходимости отрицаний к фиксированной точке.

Результаты раздела 1 основаны на работах [8, 43]. Там же впервые введено понятие сжимающих и разжимающих отрицаний. Общие свойства инволюций исследовались в работах [111, 116]. Биективные отрицания называют обычно строгими, а инволюции – сильными отрицаниями. Фиксированные точки называют также точкой симметрии, уровнем симметрии, равновесием, самоотрицающей точкой и т.д. Теорема 2.3, лемма 2.4 и теорема 2.5 основаны на работах [110, 111]. Предложение 2.6 основано на работе [75]. В работе [72] исследуется связь операции отрицания с операцией импликации. Там же дается представление биективных (строгих) отрицаний с помощью двух автоморфизмов. Первые методы генерации сжимающих и разжимающих отрицаний на [0,1] были предложены в работе [54]. Предложение 2.15 основано на этой работе. Остальные результаты раздела 2 (предложение 2.7 и далее) являются новыми [45]. Результаты раздела 2.3 основаны на работе [53].