Институт проблем информатики
Академии наук Республики Татарстан

Казанский государственный технологический
университет

И.З. Батыршин

ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

Казань
Отечество
2001

ББК 22.12
УДК 510
Б28

Печатается по постановлению
Ученого совета Института проблем информатики
Академии наук Республики Татарстан
и по решению Ученого Совета
Казанского государственного технологического университета

Рецензент:
д.ф.м.н., проф. В.Д. Соловьев

И.З. Батыршин. Основные операции нечеткой логики и их обобщения. – Казань: Отечество, 2001. – 100 с., ил.

В книге рассматриваются свойства операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания нечеткой логики и определяемых ими операций пересечения, объединения и дополнения нечетких множеств. В первой главе рассматриваются классические операции нечеткой логики, введенные Заде, и исследуются свойства алгебры Клини. Во второй главе изучаются инволютивные и неинволютивные операции отрицания и методы их генерации. В третьей главе даются основные сведения о *t*-нормах и *t*-конормах, обсуждаются методы генерации параметрических классов неассоциативных операций конъюнкции и дизъюнкции и примеры применения этих операций в задачах нечеткого моделирования.

Предназначено для студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области мягких вычислений и разработки интеллектуальных информационных систем.

Издание работы осуществлено при финансовой поддержке Фонда НИОКР и Академии наук Республики Татарстан в рамках Программы развития приоритетных направлений науки в РТ.

ISBN 5-9222-0034-8

ВВЕДЕНИЕ

Термин “нечеткая логика” используется обычно в двух различных смыслах. В узком смысле, нечеткая логика это логическое исчисление, являющееся расширением многозначной логики. В ее широком смысле, который сегодня является преобладающим в использовании, нечеткая логика равнозначна теории нечетких множеств. С этой точки зрения нечеткая логика в ее узком смысле является разделом нечеткой логики в ее широком смысле [26].

В работе обсуждаются различные подходы к определению основных операций нечеткой логики, под которыми понимаются операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, определенные на множестве значений принадлежности, истинности, правдоподобности, а также определяемые ими операции пересечения, объединения и дополнения нечетких множеств. В нечеткой логике терминологическое отличие между операциями над значениями принадлежности и операциями над нечеткими множествами в определенной мере стирается, поскольку операции над нечеткими множествами определяются поэлементно с помощью операций над степенями принадлежности, а лингвистические связки могут интерпретироваться и как операции над значениями принадлежности и как операции над нечеткими множествами. Например, в нечетких моделях в правилах типа *«Если ТЕМПЕРАТУРА МАЛАЯ и ДАВЛЕНИЕ ВЫСОКОЕ то ПЛОТНОСТЬ СРЕДНЯЯ»* лингвистическая связка *«и»* может интерпретироваться как конъюнкция значений истинности нечетких предикатов *МАЛАЯ(t)* и *ВЫСОКОЕ(d)* при определенных значениях термов *t* и *d.* Эта связка может также интерпретироваться и как операция пересечения нечетких (цилиндрических) отношений, определяемых нечеткими множествами *МАЛАЯ* и *ВЫСОКОЕ* в декартовом произведении множеств значений температур и давлений. Более обще, связка *«и»* может интерпретироваться в задачах нечеткого моделирования как некоторая функция над значениями принадлежности *МАЛАЯ(t)* и *ВЫСОКОЕ(d)* конкретных числовых значений температуры и давления нечетким множествам *МАЛАЯ* и *ВЫСОКОЕ*. Естественно, что в каждом случае определение конкретных операций должно быть четко определено.

Рассматриваемые в работе операции являются основными операциями нечеткой логики в том смысле, что все конструкции нечеткой логики основываются на операциях конъюнкции, дизъюнкции и отрицания или на определяемых ими операциях над нечеткими множествами. В настоящее время в нечеткой логике в качестве операций конъюнкции и дизъюнкции широко используются *t*-нормы и *t*-конормы, пришедшие в нечеткую логику из теории вероятностных метрических пространств. Эти операции достаточно хорошо изучены и лежат в основе многих формальных построений нечеткой логики. В то же время расширение области приложений нечеткой логики и возможностей нечеткого моделирования вызывает необходимость обобщения этих операций. Одно направление связано с ослаблением аксиоматики этих операций с целью расширения инструментария нечеткого моделирования. Например, решение задач идентификации нечетких моделей и их оптимизации по параметрам операций вызывает необходимость рассмотрения неассоциативных операций конъюнкции и дизъюнкции с целью построения простых параметрических классов этих операций. Другое направление обобщения операций конъюнкции и дизъюнкции нечеткой логики связано с заменой множества значений принадлежности, правдоподобности [0,1] на линейное или частично упорядоченное множество лингвистических оценок правдоподобности или на списки таких оценок правдоподобности. Это направление обобщения основных операций нечеткой логики, с одной стороны, вызывается необходимостью разработки экспертных систем, в которых значения истинности, правдоподобности фактов и правил оцениваются экспертом или пользователем непосредственно в лингвистической шкале и носят качественный характер. С другой стороны, это обобщение основных операций нечеткой логики вызывается смещением направления активного развития нечеткой логики от моделирования количественных процессов, поддающихся измерению, к моделированию человеческих процессов восприятия и принятия решений на основе гранулирования информации и вычисления словами [124 - 127].

Естественным обобщением инволютивных операций отрицания нечеткой логики являются неинволютивные отрицания. Подобные отрицания представляют самостоятельный интерес и рассматриваются в нечеткой и неклассических логиках. Необходимость исследования подобных операций отрицания вызывается также введением в рассмотрение обобщенных операций конъюнкции и дизъюнкции, связанных друг с другом с помощью операции отрицания.

В первой главе книги рассматриваются основные операции нечеткой логики, введенные Заде. Соответствующая алгебра нечетких множеств является алгеброй Клини, занимая промежуточное положение между алгебрами Де Моргана и булевыми алгебрами. Алгебры Клини характеризуются в классе алгебр Де Моргана, исследуются подклассы алгебр Клини, метрические алгебры Клини и меры нечеткости на алгебрах Клини. В заключение приводится аксиоматика для операций Заде.

Во второй главе исследуются свойства отрицаний. Рассматриваются инволютивные отрицания и методы их генерации. Исследуются неинволютивные отрицания, среди которых основное внимание уделяется до настоящего времени слабо изученным сжимающим и разжимающим отрицаниям. Рассматриваются методы генерации сжимающих и разжимающих отрицаний и изучаются свойства биективных неинволютивных отрицаний.

В третьей главе рассматриваются обобщения операций конъюнкции и дизъюнкции, введенных Заде. Рассматривается аксиоматика t-норм и t-конорм, традиционно применяемых в нечеткой логике в качестве операций конъюнкции и дизъюнкции, приводятся методы их генерации и примеры параметрических операций этого типа. t-нормы и t-конормы в настоящее время достаточно хорошо изучены, поэтому основное внимание в третьей главе уделено обобщениям этих операций. Рассматривается несколько классов неассоциативных операций конъюнкции и дизъюнкции и даются методы генерации этих операций. Приводятся примеры параметрических конъюнкций и дизъюнкций нового типа, имеющие более простой вид, чем параметрические t-нормы и t-конормы, и по этой причине более удобные для их использования в задачах оптимизации нечетких моделей по параметрам операций. Приводятся примеры использования параметрических конъюнкций в задачах нечеткого моделирования.

Тематика книги определяется научными интересами автора и в основном содержит результаты, полученные при участии автора, либо содержит смежные результаты других авторов и в основном опубликованные на английском языке. Ввиду ограниченности объема в книгу не удалось включить первоначально планировавшиеся результаты автора по строго монотонным операциям на порядковых шкалах (по алгебре лексикографических оценок правдоподобности) и их приложениям в экспертных системах [7, 8, 27, 55]. Операции импликации, лежащие в основе многих формальных построений нечеткой логики и широко используемые в системах нечеткого логического вывода в данной работе не рассматриваются [37, 40, 64, 72, 74, 75, 86, 100, 116]. В работе не рассматриваются также операции агрегирования, обобщающие статистические средние, по которым в настоящее время проводятся активные исследования [22, 65, 75, 85, 90, 120]. В книге не рассматриваются юнинормы и OWA-операторы, объединяющие операции конъюнкции, дизъюнкции и агрегирования, операторы дефаззификации, используемые в нечетком моделировании, нечеткие реляционные операторы и многое другое [1, 22, 23, 32, 82, 84, 88, 90, 94, 95, 100, 120, 121]. В конце глав приводятся краткие библиографические ссылки как на результаты, обсуждаемые в тексте книги, так и на работы по смежной тематике. По этой причине библиографические ссылки в самом тексте работы минимальны.

Формулы нумеруются отдельно по главам. Определения и теоремы имеют сплошную нумерацию внутри одного раздела.

Автор выражает признательность своим друзьям и коллегам доктору М. Вагенкнехту из Университета прикладных наук Циттау/Горлитц, Германия, профессору О. Кайнаку из Босфорского университета г.

Стамбул, Турция и профессору И. Рудашу из Политехнического института г. Будапешт, Венгрия, плодотворное сотрудничество с которыми явилось причиной появления многих результатов этой работы. Особую признательность автор хотел бы выразить своим учителям проф. В. Вагину и проф. Д. Поспелову, которые стимулировали в течение многих лет исследования автора в области нечеткой логики и интеллектуальных систем. Автор хотел бы также с благодарностью отметить ту поддержку, которую он неизменно встречал у проф. Ю. Кожевникова как в первые годы своих научных исследований в области нечеткой логики, так и особенно в последние годы научного сотрудничества в области интеллектуальных информационных систем. Автор также признателен проф. В.В. Скворцову, благодаря которому он прочел первую статью по теории нечетких множеств, определившую его основное направление научных исследований.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда НИОКР и Академии наук Республики Татарстан.

ГЛАВА 1. ОПЕРАЦИИ ЗАДЕ И АЛГЕБРЫ КЛИНИ

1. Операции Заде

Обычному подмножеству A универсального множества X можно поставить в соответствие его характеристическую функцию

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in A \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Операциям пересечения, объединения и дополнения множеств взаимно однозначным образом ставятся в соответствие операции над их характеристическими функциями, определяемые поэлементно (для всех $x \in X$):

$$(\chi_A \cap \chi_B)(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x),$$
$$(\chi_A \cup \chi_B)(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x),$$
$$(\chi_{\neg A})(x) = \neg \chi_A(x),$$

где $\wedge$, $\vee$ и $\neg$ - булевы функции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания такие, что

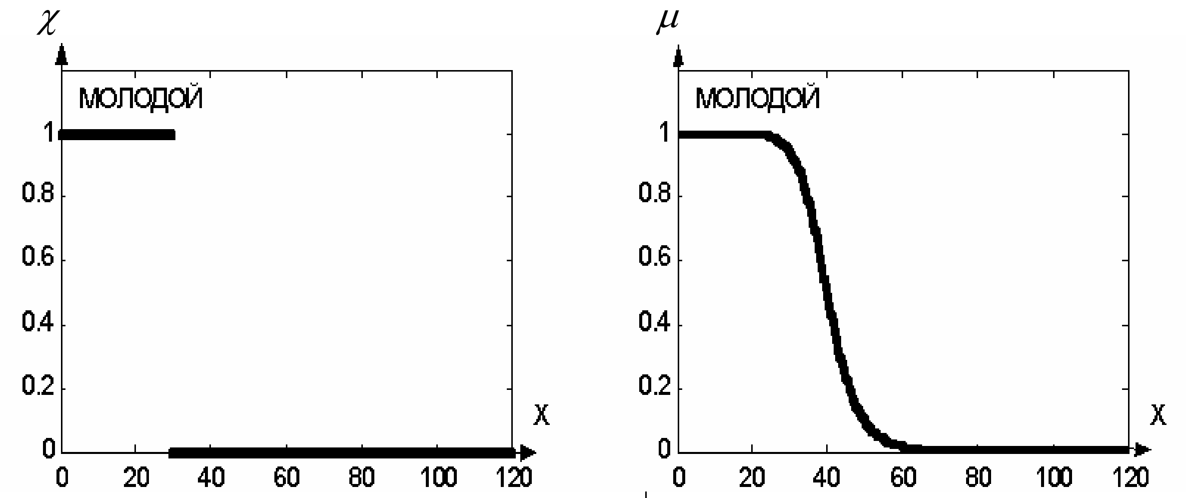
$$0\wedge 0 = 0; \quad 0\wedge 1 = 0; \quad 1\wedge 0 = 0, \quad 1\wedge 1 = 1;$$
$$0\vee 0 = 0; \quad 0\vee 1 = 1; \quad 1\vee 0 = 1; \quad 1\vee 1 = 1;$$
$$\neg 0 = 1, \quad \neg 1 = 0.$$

Для отношения включения множеств выполняется: $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ для всех $x \in X$.

Таким образом, понятие множества можно заменить понятием характеристической функции, вместо булевой алгебры множеств рассматривать булеву алгебру характеристических функций и т.д.

Понятие нечеткого множества введено как обобщение понятия характеристической функции множества. Нечеткое подмножество A универсального множества X задается функцией принадлежности $\mu_A: X \to L$, где L = [0,1]. Для каждого $x \in X$ величина μ_A(x) интерпретируется как степень принадлежности элемента x нечеткому множеству A. Существуют и другие интерпретации функции принадлежности. Нечеткое множество обычно имеет некоторую лингвистическую метку, соответствующую содержательной интерпретации самого нечеткого множества. Например, если X = [0,120] – множество числовых значений возраста, то на X могут быть определены нечеткие множества с лингвистическими метками

МОЛОДОЙ, СТАРЫЙ, ОЧЕНЬ СТАРЫЙ и т.д. На Рис. 1. показаны возможные способы представления понятия МОЛОДОЙ с помощью характеристической функции множества и функции принадлежности нечеткого множества.



а) | б)

Рис. 1. а) Характеристическая функция обычного множества
б) Функция принадлежности нечеткого множества

В отличие от обычного множества нечеткое множество позволяет учитывать степени принадлежности понятиям-классам, не имеющим четких границ, которые характерны для человеческого мышления. Вопросы интерпретации и задания функций принадлежности исследуются во многих работах и здесь не рассматриваются. Заметим лишь, что при нечетком моделировании систем, задаваемых набором экспериментальных данных, функции принадлежности могут изначально определяться достаточно произвольно в виде треугольных, трапециевидных, гауссовских и др. типа параметрических функций принадлежности, которые в дальнейшем могут настраиваться для уменьшения ошибки рассогласования между нечеткой моделью и моделируемой системой.

При исследовании алгебраических свойств нечетких множеств удобно отождествлять их с функциями принадлежности, поэтому там, где это не будет вызывать недоразумений, под нечетким множеством A будет пониматься сама функция принадлежности $A{:}X\rightarrow L$, и величина $A(x)$ будет интерпретироваться как степень принадлежности элемента x нечеткому множеству A.

Операции над нечеткими множествами задаются аналогично операциям над характеристическими функциями поэлементно:

$$(A\cap B)(x)=A(x)\wedge B(x),$$
$$(A\cup B)(x)=A(x)\vee B(x),$$

$$(\rceil A)(x) = \neg A(x).$$

В качестве операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания на [0,1] Заде предложил следующее обобщение булевых функций:

$$x \wedge y = \min(x,y),$$
$$x \vee y = \max(x,y),$$
$$\neg x = 1 - x.$$

В общем случае операции и отношения на множестве нечетких множеств определяются также поэлементно с помощью операций и отношений на элементах из X. В частности имеем

$A = B$ тогда и только тогда, когда $A(x) = B(x)$ для всех $x \in X$,
$A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $A(x) \le B(x)$ для всех $x \in X$.

Как обычно, пишут $A \subset B$, если $A \subseteq B$ и $A \neq B$. Очевидно, что отношение включения нечетких множеств является отношением частичного порядка, т.е. удовлетворяет условиям:

$A \subseteq A$	(рефлексивность),
из $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ следует $A = B$	(антисимметричность),
из $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$ следует $A \subseteq C$	(транзитивность).

Пусть $F(X)$ – множество всех нечетких подмножеств множества X. Обозначим $\varnothing$ и U следующие нечеткие множества: $\varnothing(x) = 0$ и $U(x) = 1$ для всех $x \in X$. $\varnothing$ и U являются соответственно наименьшим и наибольшим элементами по отношению частичного порядка $\subseteq$.

Нетрудно убедиться, что введенные операции удовлетворяют на $F(X)$ следующим тождествам:

$A \cap A = A,$	$A \cup A = A$	(идемпотентность),
$A \cap B = B \cap A,$	$A \cup B = B \cup A$	(коммутативность),
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	(ассоциативность),
$A \cap (A \cup B) = A,$	$A \cup (A \cap B) = A$	(поглощение),
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$		
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$		(дистрибутивность),
$\rceil(\rceil A) = A$		(инволютивность),
$\rceil(A \cap B) = \rceil A \cup \rceil B,$	$\rceil(A \cup B) = \rceil A \cap \rceil B$	(законы Де Моргана),
$A \cap \varnothing = \varnothing,\quad A \cup \varnothing = \varnothing,$	$A \cup U = U,\quad A \cap U = A$	(граничные условия).

Первые четыре тождества определяют решетку. Дистрибутивная решетка с инволютивной операцией дополнения, на которой выполняются законы Де Моргана называется решеткой Де Моргана. Решетка Де Моргана с наименьшим $\varnothing$ и наибольшим U элементами называется алгеброй Де Моргана.

Отношение частичного упорядочения $\subseteq$ элементов решетки связано с решеточными операциями $\cap$ и $\cup$ следующим образом:

$$A \subseteq B \text{ тогда и только тогда, когда } A \cap B = A,\ A \cup B = B. \qquad (1)$$

Отметим также следующие свойства решеток, которые будут в дальнейшем использоваться в доказательствах:

$$\text{из } A \subseteq B,\ A \subseteq C \text{ следует } A \subseteq B \cap C,$$
$$\text{из } A \subseteq C,\ B \subseteq C \text{ следует } A \cup B \subseteq C.$$

В алгебре Де Моргана выполняется:

$$\rceil\varnothing = U, \qquad \rceil U = \varnothing;$$
$$\text{из } A \subseteq B \text{ следует } \rceil B \subseteq \rceil A. \qquad (2)$$

Как известно, алгебра обычных множеств является булевой алгеброй, операции которой кроме перечисленных тождеств алгебры Де Моргана удовлетворяют тождествам

$$A \cap \rceil A = \varnothing, \qquad A \cup \rceil A = U. \qquad (3)$$

Для алгебры нечетких множеств выполняется в общем случае лишь следующее более слабое условие

$$(A \cap \rceil A) \cap (B \cup \rceil B) = A \cap \rceil A \qquad \text{(условие нормальности).}$$

Это тождество часто записывают в виде:

$$A \cap \rceil A \subseteq B \cup \rceil B \qquad \text{(условие Клини).}$$

Нормальная алгебра Де Моргана $<F; \cap, \cup, \rceil, \varnothing, U>$ называется алгеброй Клини. Алгебры Де Моргана и алгебры Клини играют важную роль при изучении неклассических логик.

Элемент A алгебры Де Моргана F, удовлетворяющий условиям (3), будет называться булевым.

В алгебрах Клини выполняются следующие соотношения [83]:

$$(A\cap\rceil A)\cup(B\cap\rceil B)\subseteq(A\cap\rceil B)\cup(\rceil A\cap B)=(A\cup B)\cap(\rceil A\cup\rceil B)\subseteq(A\cup\rceil A)\cap(B\cup\rceil B),$$
$$(A\cap\rceil A)\cup(B\cap\rceil B)\subseteq(A\cap B)\cup(\rceil A\cap\rceil B)=(A\cup\rceil B)\cap(\rceil A\cup B)\subseteq(A\cup\rceil A)\cap(B\cup\rceil B).$$

2. Фокальные алгебры Клини

Пусть $<F;\cap,\cup,\rceil,\varnothing,U>$ - алгебра Де Моргана, и Z является подалгеброй F по операциям $\cap$, $\cup$, $\rceil$, т.е. из $A,B\in Z$ следует $A\cap B\in Z$ и $A\cup B\in Z$, и из $A\in Z$ следует $\rceil A\in Z$. Подалгебра Z будет называться интервальной подалгеброй F, если Z является интервалом $Z = [C,D]$, где C и D – некоторые элементы из F такие, что $C\subseteq D$, и Z состоит из всех элементов $A\in F$ таких, что $C\subseteq A\subseteq D$.

Теорема 2.1. Алгебра Де Моргана F является алгеброй Клини тогда и только тогда, когда пересечение любых ее двух интервальных подалгебр не пусто, и F является булевой алгеброй тогда и только тогда, когда она содержит лишь одну непустую интервальную подалгебру (совпадающую с F).

Для доказательства теоремы докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 2.2. Для любого элемента $C\in F$ интервал $[C\cap\rceil C, C\cup\rceil C]$ является интервальной подалгеброй F, и любая интервальная подалгебра Z алгебры Де Моргана F представима в виде $Z = [C\cap\rceil C, C\cup\rceil C]$ для некоторого $C\in F$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Z = [C\cap\rceil C, C\cup\rceil C]$ для некоторого $C\in F$. Поскольку любой интервал решетки F является ее подалгеброй по операциям $\cap$ и $\cup$, достаточно показать, что Z замкнуто относительно операции дополнения $\rceil$. Из $A\in Z$ следует $C\cap\rceil C\subseteq A\subseteq C\cup\rceil C$, из (2) получаем $\rceil(C\cup\rceil C)\subseteq\rceil A\subseteq\rceil(C\cap\rceil C)$, откуда следует $C\cap\rceil C\subseteq\rceil A\subseteq C\cup\rceil C$, т.е. $\rceil A\in Z$.

Пусть $Z = [C,D]$ - интервальная подалгебра F. Тогда $\rceil C, \rceil D\in Z$, что дает $C\subseteq\rceil D$, $\rceil C\subseteq D$, и из (2) получим $\rceil(\rceil D)=D\subseteq\rceil C$, что приводит к $\rceil C= D$. Из $C\subseteq D=\rceil C$ и (1) следует $C=C\cap\rceil C$, $C\cup\rceil C=D$ и $Z = [C\cap\rceil C, C\cup\rceil C]$.

Лемма доказана.

Интервальная подалгебра $Z = [C\cap\rceil C, C\cup\rceil C]$ алгебры Де Моргана F будет обозначаться $Z(C)$ и называться интервальной подалгеброй F, порожденной элементом $C\in F$, а элемент C - элементом, порождающим интервальную подалгебру $Z(C)$. Ясно, что Z является подмножеством любой интервальной подалгебры, содержащей C.

На множестве F можно задать отношение эквивалентности $\approx$ такое, что $A\approx B$, если A и B порождают одну и ту же интервальную подалгебру.

Лемма 2.3. Каждый класс эквивалентности E отношения $\approx$ в алгебре Де Моргана F образует булеву алгебру с операциями $\cap, \cup, \rceil$ из F.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть E - произвольный класс эквивалентности отношения $\approx$ в алгебре Де Моргана F, и A, B - произвольные элементы из E. Тогда A и B порождают одну и ту же интервальную подалгебру $Z= [A\cap\rceil A,\ A\cup\rceil A] = [B\cap\rceil B,\ B\cup\rceil B]$, причем из $A,B\in Z$ следует, что $E\subseteq Z$. Из инволютивности $\rceil$ следует, что $\rceil A, \rceil B\in E$. Покажем, что $A\cap B$ принадлежит E. Обозначим $C = A\cap B$. Тогда, учитывая (1) и $A\cap\rceil A \subseteq B$, $B\cap\rceil B \subseteq A$, $A\cap\rceil A = B\cap\rceil B$, получим: $C\cap\rceil C = (A\cap B)\cap\rceil(A\cap B) = A\cap B\cap(\rceil A\cup\rceil B) = (A\cap B\cap\rceil A)\cup(A\cap B\cap\rceil B) = (A\cap\rceil A)\cup(B\cap\rceil B) = (A\cap\rceil A)$, далее имеем $C\cup\rceil C = \rceil(C\cap\rceil C) = \rceil(A\cap\rceil A) = A\cup\rceil A$, что дает $Z= [C\cap\rceil C, C\cup\rceil C]= Z(C)$, откуда следует $C\in E$ и $A\cap B\in E$. Аналогично показывается, что $A\cup B\in E$. Таким образом, E является подалгеброй алгебры Де Моргана F. Учитывая, что для произвольного $A\in E$ элементы $A\cap\rceil A$ и $A\cup\rceil A$ являются соответственно наименьшим и наибольшим элементами в E, получаем, что E образует булеву алгебру.

Лемма 2.4. Для произвольных элементов A,B алгебры Де Моргана F выполняется $Z(A)\cap Z(B) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда выполняется

$$(A\cap\rceil A)\cup(B\cap\rceil B)\subseteq(A\cup\rceil A)\cap(B\cup\rceil B) \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что пересечение интервальных подалгебр алгебры Де Моргана F, если оно не пусто, является интервальной подалгеброй F, так как пересечение подалгебр является подалгеброй, а пересечение интервалов является интервалом. Пусть $Z(A)\cap Z(B) \neq \varnothing$, тогда $Z(A)\cap Z(B) = \{C\in F \mid A\cap\rceil A\subseteq C\subseteq A\cup\rceil A$ и $B\cap\rceil B\subseteq C\subseteq B\cup\rceil B\} \neq \varnothing$, откуда следует $Z(A)\cap Z(B) = \{C\in F \mid (A\cap\rceil A)\cup(B\cap\rceil B)\subseteq C\subseteq (A\cup\rceil A)\cap(B\cup\rceil B)\} \neq \varnothing$, что приводит к (4). Обратным путем показывается, что если существуют $A,B\in F$, для которых выполняется (4), то $Z(A)\cap Z(B)\neq \varnothing$.

Лемма 2.5. В алгебре Де Моргана условие Клини, условие (4) и условие

$$\text{из } A\subseteq \rceil A,\ B\subseteq \rceil B \text{ следует } A\cup B \subseteq \rceil A\cap\rceil B \tag{5}$$

попарно эквивалентны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (5) $\Rightarrow$ (4). Из свойств операций $\cap$ и $\cup$ и законов Де Моргана следует: $A\cap\rceil A\subseteq A\cup\rceil A = \rceil(A\cap\rceil A)$, $B\cap\rceil B\subseteq B\cup\rceil B = \rceil(B\cap\rceil B)$, что совместно с (5) приводит к (4).

(4) $\Rightarrow$ (условие Клини). $A\cap\rceil A\subseteq (A\cap\rceil A)\cup(B\cap\rceil B)\subseteq (A\cup\rceil A)\cap(B\cup\rceil B)\subseteq B\cup\rceil B$.

(Условие Клини) $\Rightarrow$ (5). Пусть выполняется $A\subseteq \rceil A$, $B\subseteq \rceil B$, тогда $A=A\cap\rceil A\subseteq B\cup\rceil B = \rceil B$, и $B=B\cap\rceil B\subseteq A\cup\rceil A = \rceil A$. Из $A\subseteq \rceil A$, $B\subseteq \rceil B$ и из $A\subseteq \rceil B$, $B\subseteq \rceil A$ следует $A\subseteq\rceil A\cap\rceil B$ и $B\subseteq\rceil A\cap\rceil B$, что дает $A\cup B \subseteq \rceil A\cap\rceil B$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.1.

1) Если пересечение любых двух интервальных подалгебр F не пусто, то из лемм 2.4 и 2.5 следует, что F - нормальна.

2) Пусть F – алгебра Клини, и Z_1, Z_2 – произвольные ее интервальные подалгебры. Из леммы 2.2 следует, что существуют некоторые $A,B\in F$, порождающие эти интервальные подалгебры, а из лемм 2.5 и 2.4 следует, что пересечение интервальных подалгебр Z_1, Z_2 не пусто.

3) Пусть F - булева алгебра. Тогда для всех $A\in F$ выполняется $A\cap\rceil A = \varnothing$, $A\cup\rceil A = U$ и $Z(A) = [\varnothing,U] = F$.

4) Пусть F содержит лишь одну интервальную подалгебру. Тогда отношение $\approx$ содержит лишь один класс эквивалентности, совпадающий с F, который в соответствии с леммой 2.3 является булевой алгеброй.

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что алгебра Де Моргана, не являющаяся алгеброй Клини, содержит по крайней мере две интервальные подалгебры, пересечение которых пусто. Простейшим примером такой алгебры является множество из четырех элементов $F= \{\varnothing, A, B, U\}$, с диаграммой Хассе, представленой на рис. 2, и с операцией отрицания: $\rceil A = A$, $\rceil B = B$, $\rceil\varnothing = U$, $\rceil U = \varnothing$. Тогда $Z(A)=\{A\}$, $Z(B)=\{B\}$, $Z(\varnothing)= Z(U)= F$, и $Z(A)\cap Z(B)=\varnothing$.

Определение 2.6. Интервальная подалгебра, содержащаяся во всех других интервальных подалгебрах алгебры Клини F, называется центральной подалгеброй F или фокусом F, а алгебра Клини, содержащая фокус, называется фокальной алгеброй Клини.

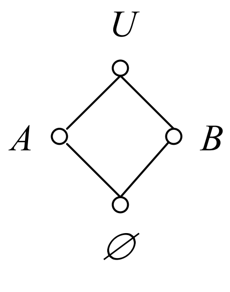


Рис. 2. Диаграмма Хассе четырехэлементного множества

Из теоремы 2.1 следует следующий результат.

Следствие 2.7. Фокус алгебры Клини, если он существует, является булевой алгеброй.

Теорема 2.8. В полных алгебрах Клини фокус всегда существует.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть F - полная алгебра Клини. Из полноты F следует существование в F элементов

$$G = \sup_{A\in F} \{A \cap \rceil A\}, \qquad H = \inf_{B\in F} \{B \cup \rceil B\}. \tag{6}$$

Из условия Клини и определения *sup* и *inf* следует $G \subseteq B\cup\rceil B$ для всех $B\in F$ и $G\subseteq H$. Из леммы 2.2 следует, что произвольная интервальная подалгебра представима в виде $[C\cap\rceil C,\ C\cup\rceil C]$ для некоторого $C\in F$, и из (6) и $G\subseteq H$ следует $C\cap\rceil C\subseteq G\subseteq H\subseteq C\cup\rceil C$, т.е. интервал $[G,H]$ содержится в любой интервальной подалгебре алгебры Клини F.

Из $A\cap\rceil A\subseteq G$ для всех $A\in F$ и из (2) следует $\rceil G\subseteq A\cup\rceil A$ для всех $A\in F$, и из (6) и определения *inf* получим $\rceil G\subseteq H$. Двойственно получаем $G\subseteq\rceil H$, и из (2) и инволютивности отрицания следует $H\subseteq\rceil G$. Сравнивая $\rceil G\subseteq H$ и $H\subseteq\rceil G$, получим $\rceil G=H$. Таким образом, имеем $[G,H] = [G,\rceil G] = [G\cap\rceil G,\ G\cup\rceil G]$, т.е. $[G,H]$ есть интервальная подалгебра F.

Теорема доказана.

Из теоремы 2.8 в частности следует, что полная алгебра Клини является фокальной алгеброй Клини.

Теорема 2.9. Алгебра Де Моргана F является фокальной алгеброй Клини тогда и только тогда, когда в F существует элемент W такой, что на F выполняется тождество:

$$(A\cap\rceil A)\cup(W\cap\rceil W) = W. \tag{7}$$

Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 2.10. Пусть W - некоторый элемент алгебры Де Моргана F. Тогда на F выполняется (7) тогда и только тогда, когда выполняется

$$W\cap\rceil W = W, \tag{8}$$
$$(A\cap\rceil A)\cup W = W. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (7), подставляя W вместо A и применяя идемпотентность, получим (8). Подставляя (8) в (7), получим (9).

Подставляя $W\cap\rceil W$ из (8) в левую часть (9) вместо W, получим (7).

Лемма 2.10 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о   т е о р е м ы 2.9. Пусть в алгебре Де Моргана F существует элемент W такой, что (7) выполняется для всех элементов A из F, тогда на F выполняется (8), (9), что совместно с (1) дает:

$$W \subseteq \rceil W, \tag{10}$$
$$A \cap \rceil A \subseteq W. \tag{11}$$

Из (11) и (2), получим: $\rceil W \subseteq A \cup \rceil A$, что совместно с (11) и (10) дает: $A \cap \rceil A \subseteq W \subseteq \rceil W \subseteq A \cup \rceil A$, т.е. $[W, \rceil W] = [W \cap \rceil W, W \cup \rceil W]$, есть интервальная подалгебра, которая содержится в любой интервальной подалгебре $[A \cap \rceil A, A \cup \rceil A]$, и из теоремы 2.1 и определения 2.6 следует, что F - фокальная алгебра Клини.

Пусть F - фокальная алгебра Клини с фокусом $Z = [C \cap \rceil C, C \cup \rceil C]$. Обозначим $W = C \cap \rceil C$, тогда $\rceil W = C \cup \rceil C$, $Z = [W, \rceil W]$ и выполняется (10). Для каждого $A \in F$ фокус Z содержится в интервальной подалгебре $Z(A) = [A \cap \rceil A, A \cup \rceil A]$ и выполняется $A \cap \rceil A \subseteq W \subseteq \rceil W \subseteq A \cup \rceil A$, откуда следует (11). Из (10) и (11) следует (8), (9) и (7).

Теорема доказана.

Как следует из теоремы 2.9, тождество (7) совместно с тождествами алгебры Де Моргана определяет многообразие фокальных алгебр Клини $<F; \cap, \cup, \rceil, \varnothing, U, W>$ с фокусом $[W, \rceil W]$. Очевидно, что любая булева алгебра с выделенным элементом $W = \varnothing$ также является фокальной алгеброй Клини.

Элемент W алгебры Де Моргана, удовлетворяющий условию

$$\rceil W = W, \tag{12}$$

будет называться центральным элементом, а алгебры $<F; \cap, \cup, \rceil, \varnothing, U, W>$, определяемые системой тождеств алгебр Клини и тождеством (12) будут называться алгебрами Клини с центральным элементом (иногда алгебрами Клини называются именно такие алгебры).

Алгебра Клини с центральным элементом является фокальной алгеброй Клини с фокусом, состоящим из единственного элемента W: условие Клини и (12) приводят к $A \cap \rceil A \subseteq W \cup \rceil W = W$, к (9), (8) и (7).

В алгебрах Де Моргана с центральным элементом W условие Клини эквивалентно условию

$$A \cap \rceil A \subseteq W. \tag{13}$$

В самом деле, из условия Клини и (12) следует (13): $A \cap \rceil A \subseteq W \cup \rceil W = W$. Из (13) и (12) получаем, учитывая (2): $W = \rceil W \subseteq \rceil (B \cap \rceil B) = B \cup \rceil B$ для всех B из F, что совместно с (13) приводит к условию Клини.

Теорема 2.11. Алгебра Де Моргана F с центральным элементом W нормальна (является алгеброй Клини), тогда и только тогда, когда W является единственным центральным элементом в F.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если F является алгеброй Клини с центральным элементом, то из того, что центральный элемент является интервальной подалгеброй, и из теоремы 2.1. следует его единственность.

Пусть W единственный центральный элемент в алгебре Де Моргана F. Покажем, что F нормальна. Предположим, что это не так, тогда в F существует элемент A, для которого не выполняется (13). Обозначим $T= A\cup\rceil A$, $P=A\cap\rceil A$, $B=(W\cap T)\cup P$. Из законов Де Моргана и инволютивности отрицания имеем $\rceil T= P$ и $\rceil P=T$, что совместно с (12) и дистрибутивностью дает: $\rceil B=\rceil[(W\cap T)\cup P] = \rceil(W\cap T)\cap\rceil P = (\rceil W\cup\rceil T)\cap T =.(W\cup P)\cap T = (W\cap T)\cup(P\cap T)= (W\cap T)\cup P= B$. Таким образом, B – центральный элемент. Имеем $A\cap\rceil A = P \subseteq (W\cap T)\cup P = B$, т.е. $A\cap\rceil A \subseteq B$. Поскольку в силу предположения для W (13) не выполняется, получаем $B \neq W$, и F имеет более одного центрального элемента, что противоречит тому, что W – единственный центральный элемент в F.

Теорема доказана.

3. Метрические алгебры Клини и меры нечеткости

Мерой нечеткости (мерой энтропии) на алгебре Клини $<F;\cap,\cup,\rceil,\varnothing,U>$ называется вещественная функция на F такая, что:

$Q1$. $d(\varnothing) = 0$;
$Q2$. $d(A) = d(\rceil A)$;
$Q3$. из $A\cap\rceil A \subset B\cap\rceil B$ следует $d(A)<d(B)$;
$Q4$. $d(A\cup B) + d(A\cap B) = d(A) + d(B)$.

Первоначально мера нечеткости была введена Де Люка и Термини [63] как аналог меры энтропии, как мера неопределенности, связанной с частичной принадлежностью элементов нечеткому множеству, как мера отличия нечеткого множества от обычного множества. В дальнейшем эта мера была обобщена на алгебры Клини и было показано, что она характеризует алгебры Клини и булевы алгебры в классе метрических алгебр Де Моргана.

Из $Q1$, $Q3$, граничных условий и из (12) следует неотрицательность меры нечеткости. Условие $Q2$ требует, чтобы мера нечеткости принимала одинаковые значения для нечеткого множества и его дополнения. Условие $Q3$ фактически оценивает близость нечетких множеств к обычным множествам, для которых выполняется $A\cap\rceil A=\varnothing$. Условие $Q4$

характеризует аддитивность меры нечеткости. В частности, при $A \cap B = \varnothing$ оно приводит к $d(A \cup B) = d(A) + d(B)$.

Вещественная функция v на решетке F такая, что

$$v(A \cup B) + v(A \cap B) = v(A) + v(B), \quad (14)$$
$$\text{из } A \subset B \text{ следует } v(A) < v(B),$$

называется положительной оценкой на F. Из теории решеток известно, что положительная оценка v определяет метрическую решетку F с метрикой:

$$\rho(A,B) = v(A \cup B) - v(A \cap B).$$

Например, на алгебре $F(X)$ нечетких множеств, определенных на конечном универсуме $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, мощность нечеткого множества $v(A) = \sum_{k=1}^{n} A(x_k)$ является положительной оценкой, а определяемой ею метрикой является функция $\rho(A,B) = \sum_{k=1}^{n} |A(x_k) - B(x_k)|$. Заметим, что в практических приложениях теории нечетких множеств, как правило, рассматриваются нечеткие множества, определенные на конечном универсуме X.

Теорема 3.1. Метрическая алгебра Де Моргана $\langle F; \cap, \cup, \rceil, \varnothing, U \rangle$ является алгеброй Клини тогда и только тогда, когда на F может быть задана мера нечеткости d, причем, эта алгебра является булевой тогда и только тогда, когда d всюду на F равна нулю.

Для доказательства теоремы установим предварительно ряд свойств мер нечеткости на F.

Предложение 3.2.

$$d(A) = d(\rceil A) = d(A \cap \rceil A) = d(A \cup \rceil A), \quad (15)$$
$$d(A) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } A \text{ - булев элемент в } F. \quad (16)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. (15) следует из $Q2$, инволютивности, законов Де Моргана и из $Q4$.

(16) следует из (15), (3), $Q1$ и из $Q3$, (3), (15), $Q1$.

Предложение 3.3. Функции

$$d(A) = v(A \cap \rceil A) - v(\varnothing), \quad (17)$$
$$d(A) = 0.5(\rho(\varnothing, U) - \rho(A, \rceil A)). \quad (18)$$
$$d(A) = v(U) - v(A \cup \rceil A), \quad (19)$$

являются мерами нечеткости на метрической алгебре Клини F с положительной оценкой v и определяемой ею метрикой ρ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполнение $Q1$ - $Q3$ для функции (17) очевидно. Покажем, что (17) удовлетворяет условию Q4. Из законов Де Моргана, (14) и свойств дистрибутивных решеток следует:

$d(A\cup B) + d(A\cap B) = v[(A\cup B)\cap\neg(A\cup B)] - v(\varnothing)+v[(A\cap B)\cap\neg(A\cap B)] - v(\varnothing)=$
$v[(A\cup B)\cap(\neg A\cap\neg B)] + v[(A\cap B)\cap(\neg A\cup\neg B)] - 2v(\varnothing)=$
$v[(A\cup B)\cap(\neg A\cap\neg B)\cup(A\cap B)\cap(\neg A\cup\neg B)]+v[(A\cup B)\cap(\neg A\cap\neg B)\cap(A\cap B)\cap(\neg A\cup\neg B)]-$
$2v(\varnothing)= v[(A\cap\neg A\cap\neg B)\cup(B\cap\neg A\cap\neg B)\cup(A\cap B\cap\neg A)\cup(A\cap B\cap\neg B)] +$
$v(\neg A\cap\neg B\cap A\cap B) - 2v(\varnothing)=$
$v[(A\cap\neg A\cap B)\cup(A\cap\neg A\cap\neg B)\cup(B\cap\neg B\cap A)\cup(B\cap\neg B\cap\neg A)] +v[(A\cap\neg A)\cap(B\cap\neg B)] -$
$2v(\varnothing)= v[(A\cap\neg A)\cap(B\cup\neg B)\cup(B\cap\neg B)\cap(A\cup\neg A)] +v[(A\cap\neg A)\cap(B\cap\neg B)] - 2v(\varnothing).$

Применяя условие нормальности к первому слагаемому и используя (14), получим:

$$d(A\cup B) + d(A\cap B) = v[(A\cap\neg A)\cup(B\cap\neg B)] + v[(A\cap\neg A)\cap(B\cap\neg B)] - 2v(\varnothing) = v(A\cap\neg A) + v(B\cap\neg B) - 2v(\varnothing)= d(A) + d(B).$$

Выполнение $Q1 - Q4$ для функции (19) проверяется аналогично.

Функция (18) является полусуммой (17) и (19). Как это нетрудно увидеть, сумма мер нечеткости, взятых с положительными коэффициентами, также будет мерой нечеткости. Поэтому функция (18) также будет мерой нечеткости.

(18) дает естественную интерпретацию меры нечеткости как функции от расстояния между нечетким множеством и его дополнением.

Простейшая мера нечеткости вида (17) определяется мощностью нечеткого множества: $d(A) = \sum_{k=1}^{n}\min(A(x_k),(1-A(x_k)))$.

Лемма 3.4. Если алгебра Де Моргана F не является нормальной, то не существует вещественной функции d на F, удовлетворяющей условиям $Q1- Q4$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что F не нормальна, и на ней определена функция d, удовлетворяющая условиям $Q1 - Q4$. Тогда существуют $A,B\in F$, для которых условие нормальности не выполняется, и из выполнения $(A\cap\neg A)\cap(B\cup\neg B) \subseteq A\cap\neg A$ для всех A, B следует строгое неравенство $(A\cap\neg A)\cap(B\cup\neg B) \subset A\cap\neg A$. Обозначим $(A\cap\neg A)\cap(B\cup\neg B)$ через C, тогда получаем: $C \subset A\cap\neg A \subseteq A\cup\neg A \subseteq (A\cup\neg A)\cup(B\cap\neg B) = \neg C$, откуда следует $C\cap\neg C = C\subset A\cap\neg A$, и из $Q3$ имеем $d(C) < d(A)$. Учитывая (15), получаем $d(\neg C) = d(C) < d(A\cap\neg A) = d(A\cup\neg A)$, откуда следует

$$d(C) + d(\neg C) = d[(A\cap\neg A)\cap(B\cup\neg B)]+d[(A\cup\neg A)\cup(B\cap\neg B)] < d(A\cap\neg A)+d(A\cup\neg A). \qquad (20)$$

Так как для A и B условие Клини не выполняется, то из (2), инволютивности и законов Де Моргана следует, что не выполняется и двойственное соотношение $B\cap\urcorner B \subseteq A\cup\urcorner A$, откуда аналогично предыдущему получаем

$$d[(B\cap\urcorner B)\cap(A\cup\urcorner A)]+d[(B\cup\urcorner B)\cup(A\cap\urcorner A)] < d(B\cap\urcorner B)+d(B\cup\urcorner B).$$

Складывая последнее неравенство с (20), получаем противоречие с равенством: $d(A\cap\urcorner A)+ d(A\cup\urcorner A)+ d(B\cap\urcorner B)+ d(B\cup\urcorner B)= d[(A\cap\urcorner A)\cap(B\cup\urcorner B)]+ d[(A\cap\urcorner A)\cup(B\cup\urcorner B)] + d[(A\cup\urcorner A)\cap(B\cap\urcorner B)] + d[(A\cup\urcorner A)\cup(B\cap\urcorner B)]$, которое следует из $Q4$, что доказывает лемму.

Теорема 3.1. следует из предложений 3.2, 3.3 и леммы 3.4.

Из свойств меры нечеткости (15) и свойств фокуса следует, что в метрических фокальных алгебрах Клини все элементы фокуса имеют максимальное значение нечеткости. Например, в алгебре $F(X)$ нечетких множеств, определенных на конечном универсуме $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$ со значениями в $L = [0,1]$, центральным элементом является нечеткое множество W с функцией принадлежности $W(x) = 0.5$ для всех $x\in X$, которое и имеет максимальную нечеткость. Если в качестве L взять $L= \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$, определив операции на L так же, как и на [0,1], то $F(X)$ будет фокальной алгеброй Клини с фокусом $[W,\urcorner W]$, где $W(x) = 0.4$ и $\urcorner W(x)= 0.6$ для всех $x\in X$. Все нечеткие множества из этого интервала имеют одинаковое максимальное значение меры нечеткости.

Метрика, удовлетворяющая на алгебре Де Моргана F условию

$$\rho(A,B)= \rho(\urcorner A,\urcorner B),$$

называется симметричной. Можно показать, что метрика симметрична тогда и только тогда, когда определяющая ее оценка является симметричной, т.е. удовлетворяет на F условию

$$v(A) + v(\urcorner A) = v(\varnothing) + v(U).$$

Если оценка v симметрична, и ρ - определяемая ею метрика, то выражения (17) – (19) определяют одну и ту же меру нечеткости. На алгебре Клини F с центральным элементом W и симметричной метрикой мера нечеткости на F может быть задана как расстояние от центрального элемента:

$$d(A) = 0.5\rho(\varnothing,U) - \rho(A,W).$$

Оценка v называется нормализованной, если $v(\varnothing)= 0$. Если на алгебре Клини F с центральным элементом W задана мера нечеткости d, то с ее помощью можно задать на F нормализованную симметричную оценку:

$$v(A) = 2d(A\cap W) - d(A),$$

и соответствующую ей симметричную метрику.

С помощью последнего соотношения можно вводить на алгебре Клини с центральным элементом положительные оценки и метрики, соответствующие логарифмической энтропии и другим мерам нечеткости, рассматриваемым на множестве нечетких множеств.

Можно показать справедливость следующего утверждения [41].

Теорема 3.5. В алгебре Клини с центральным элементом устанавливается взаимно однозначное соответствие между мерами нечеткости и нормализованными симметричными положительными оценками, между мерами нечеткости и симметричными метриками.

4. Система аксиом для операций Заде

Введенные Заде операции конъюнкции $x\wedge y = min(x,y)$ и дизъюнкции $x\vee y = max(x,y)$ однозначно определяются следующими аксиомами [38, 111]:

P1. Дистрибутивность.

P2. Монотонность (неубывание):

$$x\wedge y \le z\wedge u \quad \text{и} \quad x\vee y \le z\vee u, \qquad \text{если} \quad x\le z,\ y\le u.$$

P3. Граничные условия:

$$x\wedge 1 = 1\wedge x = x,\ \ x\vee 0 = 0\vee x = x.$$

Из монотонности и граничных условий следует выполнение условий:

$$0\wedge x = 0, \qquad 1\vee x = 1.$$

Далее выводится условие идемпотентности дизъюнкции:

$$x = x\wedge 1= x\wedge(1\vee 1)=(x\wedge 1)\vee(x\wedge 1)= x\vee x,$$

и из $max(x,y) = max(x,y)\vee max(x,y) \ge x\vee y \ge max(x\vee 0,0\vee y) = max(x,y)$ следует $x\vee y = max(x,y)$. Аналогично выводится $x\wedge y = min(x,y)$.

Операция отрицания Заде может быть определена как функция $n{:}L \to L$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

$$N1.\ n(0) = 1, \qquad\qquad n(1) = 0,$$
$$N2.\ x - y = n(y) - n(x), \text{ для всех } x,y \in L.$$

Первая аксиома обобщает соответствующее свойство булева отрицания. Вторая означает, что приращение значений принадлежности и их отрицаний равны по величине и противоположны по знаку. Из этих аксиом следует $x + n(x) = 1$ для всех $x \in L$, что приводит к $n(x) = 1 - x$.

Однако, в нечеткой логике исследуется более широкий класс отрицаний, определяемых аксиомой $N1$ и аксиомой невозрастания:

$$N3.\ n(y) \le n(x), \qquad \text{если } x \le y.$$

Особый интерес представляют отрицания, удовлетворяющие также аксиоме инволютивности. Такие отрицания называются сильными отрицаниями. Кроме отрицания Заде $n(x) = 1 - x$ этим условиям удовлетворяет, например, отрицание: $n(x)=(1-x^2)^{1/2}$. Более подробно нечеткие отрицания будут рассматриваться в следующей главе.

Приведем без доказательства следующий результат [38, 111].

Теорема 4.1. Если непрерывные, неубывающие, ассоциативные и удовлетворяющие граничным условиям функции $\wedge$ и $\vee$ удовлетворяют законам Де Моргана для всех сильных отрицаний, то $x \wedge y = min(x,y)$ и $x \vee y = max(x,y)$.

Библиографические комментарии к главе 1

Понятие нечеткого множества было введено Заде в 1965 году [123], где он ввел основные операции над нечеткими множествами. Там же он предложил также более «мягкие» алгебраические операции конъюнкции и дизъюнкции $x \wedge y = xy$ и $x \vee y = x+y-xy$, называемые в нечеткой логике также вероятностными конъюнкцией и дизъюнкцией соответственно. В 1966 году вышла статья Заде по нечетким множествам на русском языке [23].

Интерпретация функций принадлежности и методы их получения могут быть найдены в работах [1, 7, 10, 14, 18, 22 - 27, 31-33, 55, 66, 75-78, 80, 84, 88, 90, 105, 109, 124-127]. Параметрические функции принадлежности можно найти, например, в работах [1, 82, 90].

Использование нечетких множеств для описания лингвистических понятий и восприятий обсуждается в работах [1, 17, 18, 22, 24, 25, 80, 124-127]. Практические приложения нечетких множеств в задачах моделирования обсуждается в [1 – 3, 15, 17 - 19, 22, 27, 30 – 33, 35, 36, 55, 57, 77, 82, 84, 86, 88, 90, 100, 107, 108, 122, 127]. Обобщение понятия нечеткого множества на случай частично упорядоченного множества значений принадлежности L было предложено в работе [78] и рассматривалось в работе [62].

Связь алгебры нечетких множеств с алгебрами Клини впервые по-видимому обсуждалась в работе [105]. Алгебры Де Моргана и алгебры Клини в связи с неклассическими и нечеткими логиками обсуждались в работах [5, 6, 12, 29, 41, 42, 59, 64, 67, 68, 70, 83, 93, 102, 111]. Общие свойства решеток обсуждаются в работах [16, 21].

Материал раздела 2 основан на работе [42]. Теорема 2.11 является модификацией результата изложенного в [83].

Понятие меры нечеткости нечетких множеств как аналога меры энтропии вероятностных распределений было введено в [63]. Различные аксиоматики и свойства показателей нечеткости обсуждаются в работах [1, 4 – 6, 12, 29, 40 - 42, 63, 89, 90, 118]. Обобщение меры нечеткости на алгебры Де Моргана использует аксиоматику работы [4]. Материал раздела 3 основан на работах [6, 41]. В этих работах можно найти также свойства метрик и мер нечеткости на алгебрах Клини.

В работах [40, 64, 118] исследуются также меры нечеткости на алгебрах Де Моргана F со значениями в F, например, определяемые как $d(A) = A \cap \rceil A$. Двойственная мера $k(A) = A \cup \rceil A$ может служить для оценки “четкости” элемента A.

Впервые аксиомы для операций Заде исследовались в [56], где было показано, что введенные Заде операции конъюнкции и дизъюнкции и определяемые ими операции пересечения и объединения однозначно определяются системой аксиом, в число которых входят коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, непрерывность, монотонность, и т.д. Общие вопросы определения нечетких связок исследовались также в работах [65, 72, 88, 119]. В работах [38, 111] исследуются вопросы характеризации основных операций нечеткой логики, введенных Заде, в частности, аксиомы P1 - P3 и теорема 4.1 основаны на этих работах. Вывод операций *min* и *max* из аксиом дистрибутивности и идемпотентности рассматривался также в работах [113, 116]. Свойства обобщенных дистрибутивных и идемпотентных операторов изучаются также в [60, 94, 95].

Операции отрицания подробно рассматриваются в следующей главе.